

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN**

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 02 trang)

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
NĂM HỌC 2026 - 2027**

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (2,0 điểm).

- a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - 3y = 0$.
- b) Cho n là một số nguyên dương và m là một ước số nguyên dương của $2n^2$. Hỏi $n^2 + m$ có thể là số chính phương không? Tại sao?

Câu 2 (7,0 điểm).

- a) Giải phương trình: $\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{2}{x+1}\right)^2 = 5$.
- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2(1+y^2-y^3) = y(x^2+y^2+1) \\ 31x^2-1 = 16(y-x\sqrt{4x^2-1}) \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm).

- Một hộp có 7 viên bi gồm hai viên bi màu xanh được đánh số 1 và 2; hai viên bi màu đỏ được đánh số 3 và 4; ba viên bi màu vàng được đánh số 5, 6 và 7.
- a) Một bạn học sinh chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Tính xác suất của biến cố “6 viên bi được chọn có 3 viên bi màu vàng”.
- b) Thầy giáo tổ chức trò chơi bốc bi trúng thưởng như sau: Mỗi học sinh chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp rồi bỏ lại, nếu trong các viên bi được chọn có hai viên bi được đánh số liên tiếp nhau thì bạn đó trúng thưởng. Bạn An là một học sinh tham gia trò chơi. Tính xác suất để bạn An trúng thưởng.

Câu 4 (7,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn có $BC > BA$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB , BC , CA lần lượt tại các điểm M , N , E . Gọi K là giao điểm của tia BI với đoạn thẳng NE .

- a) Chứng minh $\widehat{BIA} = \widehat{BNE}$ và AKB là tam giác vuông.
- b) Tia BI cắt đoạn thẳng AC tại điểm T . Chứng minh $KT.BN = KB.ET$.
- c) Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI . Tia NE và tia NM cắt đường thẳng d lần lượt tại các điểm F và D . Gọi H là giao điểm của AI và ME , O là giao điểm của hai đường thẳng HF và DI . Chứng minh bốn điểm A , O , I , F cùng thuộc một đường tròn.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) - \sqrt{11 + \frac{4}{xyz}}.$$

Câu 6 (1,0 điểm).

Trên mặt phẳng cho 18 điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua hai điểm bất kì ta

vẽ được một đoạn thẳng và trên đoạn thẳng đó ghi một số nguyên bất kì lớn hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các cạnh là các đoạn thẳng đã vẽ và tổng các số ghi trên các cạnh của tam giác đó là hợp số.

----- **HẾT** -----

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm./.

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 NĂM HỌC 2026 – 2027



Chuyên Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu

Môn thi: Toán (vòng 2)

Nguyễn Nhật Huy - Lê Nam Khánh - Phạm Ngọc Uy

**Trần Nguyễn Đức Nhật - Lê Thanh Lâm - Hoàng Lê
Nhật Tùng**

**Phan Anh Quân - Trịnh Huy Vũ - Nguyễn Đăng
Khoa - Nguyễn Đức Quán**

1. PHẦN ĐỀ THI

Câu 1.

- 1) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - 3y = 0$.
- 2) Cho n là một số nguyên dương và m là một ước số nguyên dương của $2n^2$. Hỏi $n^2 + m$ có thể là số chính phương không? Tại sao?

Câu 2 (2,0 điểm).

1. Giải phương trình $\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{2}{x+1}\right)^2 = 5$.

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2(1+y^2-y^3) = y(x^2+y^2+1) \\ 31x^2-1 = 16(y-x\sqrt{4x^2-1}) \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm). Một hộp có 7 viên bi gồm hai viên bi màu xanh được đánh số 1 và 2; hai viên bi màu đỏ được đánh số 3 và 4; ba viên bi màu vàng được đánh số 5, 6 và 7.

1. Một bạn học sinh chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Tính xác suất của biến cố "6 viên bi được chọn có 3 viên bi màu vàng".
2. Thầy giáo tổ chức trò chơi bốc bi trúng thưởng như sau: Mỗi học sinh chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp rồi bỏ lại, nếu trong các viên bi được chọn có hai viên bi được đánh số liên tiếp nhau thì bạn đó trúng thưởng. Bạn An là một học sinh tham gia trò chơi. Tính xác suất để bạn An trúng thưởng.

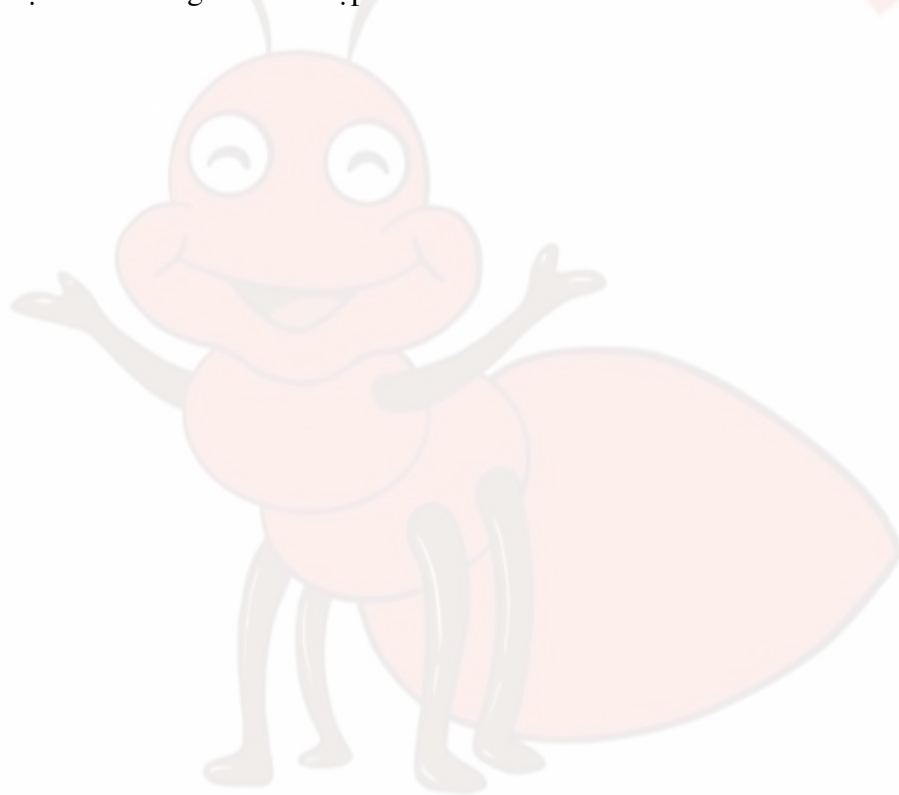
Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn có $BC > BA$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm M, N, E . Gọi K là giao điểm của tia BI với đoạn thẳng NE .

- a) Chứng minh $\widehat{BIA} = \widehat{BNE}$ và AKB là tam giác vuông.
- b) Tia BI cắt đoạn thẳng AC tại điểm T . Chứng minh $KT \cdot BN = KB \cdot ET$.
- c) Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI . Tia NE và tia NM cắt đường thẳng d lần lượt tại các điểm F và D . Gọi H là giao điểm của AI và ME , O là giao điểm của hai đường thẳng HF và DI . Chứng minh bốn điểm A, O, I, F cùng thuộc một đường tròn.

Câu 5. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) - \sqrt{11 + \frac{4}{xyz}}$$

Câu 6. Trên mặt phẳng cho 18 điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua hai điểm bất kì ta vẽ được một đoạn thẳng và trên đoạn thẳng đó ghi một số nguyên bất kì lớn hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các cạnh là các đoạn thẳng đã vẽ và tổng các số ghi trên các cạnh của tam giác đó là hợp số.



Tích Kiến Thức - Trữ Niềm Vui

2. PHẦN ĐÁP ÁN

Câu 1

- 1) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - 3y = 0$.
- 2) Cho n là một số nguyên dương và m là một ước số nguyên dương của $2n^2$. Hỏi $n^2 + m$ có thể là số chính phương không? Tại sao?

Lời giải.

- 1) Ta viết lại phương trình như sau

$$x^2 + x(3y - 2) + 2y^2 - 3y = 0.$$

Để phương trình trên có nghiệm nguyên thì $\Delta_x = (3y - 2)^2 - 4(2y^2 - 3y) = y^2 + 4$ phải là số chính phương. Đặt $y^2 + 4 = k^2$ thì $(k - y)(k + y) = 4$, mà $(k - y) + (k + y) = 2k$ chẵn nên hai số này cùng tính chẵn lẻ vì tích hai số này chẵn nên cả hai số đều chẵn. Khi đó ta có bảng sau

$k - y$	2	-2
$k + y$	2	-2
y	0	0

Vì $y = 0$ nên $x^2 - 2x = 0$ suy ra $x = 0$ hoặc $x = 2$. Vậy tất cả cặp (x, y) thỏa mãn là $(0, 0); (2, 0)$.

- 2) Nếu m là ước của $2n^2$, tồn tại các số nguyên dương k và m thỏa mãn $2n^2 = mk$ và $n^2 + m = d^2$. Với phép đặt như vậy, ta lần lượt suy ra

$$n^2 + \frac{2n^2}{k} = d^2 \Rightarrow (dk)^2 = n^2(k^2 + 2k).$$

Rõ ràng, $k^2 + 2k$ phải là một số chính phương. Do

$$k^2 < k^2 + 2k < (k + 1)^2,$$

Điều này mâu thuẫn do đó, $n^2 + m$ không thể là số chính phương.

□

Tích Kiến Thức - Trữ Niềm Vui

Câu 2

1. Giải phương trình $\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{2}{x+1}\right)^2 = 5$.

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2(1+y^2-y^3) = y(x^2+y^2+1) \\ 31x^2-1 = 16(y-x\sqrt{4x^2-1}) \end{cases}$$

Lời giải.

1. ĐKXĐ: $x \notin \{0, -1\}$

Đặt $a = \frac{2}{x}, b = \frac{2}{x+1}$ thì $ab = \frac{4}{x(x+1)}$ và $a-b = \frac{2}{x(x+1)}$.

Ta có $5 = a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab = t^2 + 4t$, với $t = \frac{2}{x(x+1)}$. Từ đó có $(t-1)(t+5) = 0$

Nếu $t = 1$ thì $x(x+1) = 2$ hay $(x-1)(x+2) = 0$. Khi đó $x = 1$ và $x = -2$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $t = -5$ thì $x(x+1) = \frac{-2}{5}$, tương đương $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-3}{20} < 0$. Trường hợp này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1, -2\}$.

2. ĐKXĐ: $x^2 \geq \frac{1}{4}$.

Phương trình đầu tiên của hệ tương đương với $(y^2+1)(x^2-x^2y-y) = 0$. Do $y^2+1 > 0$ nên $x^2-x^2y-y = 0$ hay $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $16x\sqrt{4x^2-1} = 16y-31x^2+1$ thay $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ vào ta được

$$16x\sqrt{4x^2-1} = \frac{16x^2}{x^2+1} - 31x^2 + 1$$

Đặt $t = x^2$. Bình phương hai vế lên ta được

$$16t\sqrt{4t-1} = \left(\frac{16t}{t+1} - 31t + 1\right)^2$$

tương đương

$$(3t-1)(21t^3+315t^2+231t+1) = 0$$

Do $t > 0$ nên ta phải có $3t-1 = 0$ hay $t = \frac{1}{3}$. Giải ra $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ và $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$. Thử lại chỉ có $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$

□



Câu 3

Một hộp có 7 viên bi gồm hai viên bi màu xanh được đánh số 1 và 2; hai viên bi màu đỏ được đánh số 3 và 4; ba viên bi màu vàng được đánh số 5, 6 và 7.

- Một bạn học sinh chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Tính xác suất của biến cố "6 viên bi được chọn có 3 viên bi màu vàng".
- Thầy giáo tổ chức trò chơi bốc bi trúng thưởng như sau: Mỗi học sinh chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp rồi bỏ lại, nếu trong các viên bi được chọn có hai viên bi được đánh số liên tiếp nhau thì bạn đó trúng thưởng. Bạn An là một học sinh tham gia trò chơi. Tính xác suất để bạn An trúng thưởng.

Lời giải.

- Lưu ý hộp có 7 viên bi nên việc chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp tương đương với chọn 1 viên bi để "loại đi". Để 6 viên bi được chọn có đủ 3 viên vàng thì tương đương với 1 viên bi bị "loại đi" không được có màu vàng, xác suất để điều này xảy ra là $\frac{4}{7}$.

- Chọn k phần tử từ n phần tử có $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}$ cách chọn. Có thể chứng minh bằng quy tắc nhân sau đó chia cho $k!$.

Số phần tử của không gian mẫu là C_7^3 . Ta sẽ tính số cách An chọn 3 viên bi để không có 2 viên bi nào được đánh số liên tiếp.

Gọi $a \leq b \leq c$ là số của 3 viên bi được An chọn. Lưu ý ta có $1 \leq a, b, c \leq 7$ và $b - a, c - b > 1$ (do a, b, c không được có 2 số liên tiếp). Do đó ta có

$$1 \leq a < b - 1 < c - 2 \leq 5,$$

cho nên việc chọn ra 3 viên bi với 3 số $a \leq b \leq c$ tương đương với việc chọn 3 số $a < b - 1 < c - 2$; 3 số này là 3 số tự nhiên phân biệt nằm giữa 1 và 5, có C_5^3 cách chọn.

Vậy xác suất để An không chọn ra được 2 viên bi nào liên tiếp nhau (tức là An không trúng thưởng) là

$$\frac{C_5^3}{C_7^3},$$

suy ra xác suất để An trúng thưởng là

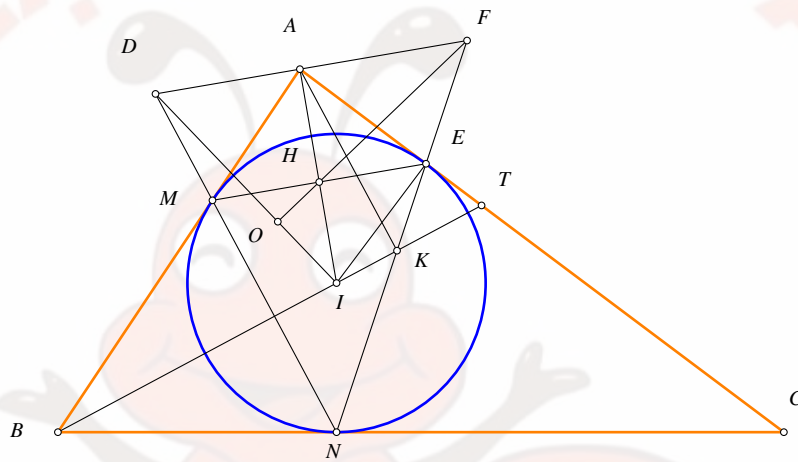
$$1 - \frac{C_5^3}{C_7^3} = \frac{5}{7}$$

□

Câu 4

Cho tam giác ABC nhọn có $BC > BA$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm M, N, E . Gọi K là giao điểm của tia BI với đoạn thẳng NE .

- Chứng minh $\widehat{BIA} = \widehat{BNE}$ và AKB là tam giác vuông.
- Tia BI cắt đoạn thẳng AC tại điểm T . Chứng minh $KT \cdot BN = KB \cdot ET$.
- Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI . Tia NE và tia NM cắt đường thẳng d lần lượt tại các điểm F và D . Gọi H là giao điểm của AI và ME , O là giao điểm của hai đường thẳng HF và DI . Chứng minh bốn điểm A, O, I, F cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải.

a) Ta có

$$\widehat{BIA} = 180^\circ - \widehat{IBA} - \widehat{IAB} = 90^\circ + \widehat{ACB}/2 = \widehat{BNE}.$$

Từ đó cũng dẫn tới $\widehat{AIK} = \widehat{ENC} = \widehat{KEC}$ nên tứ giác $AIKE$ nội tiếp, suy ra

$$\widehat{AKI} = \widehat{AEI} = 90^\circ.$$

b) Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BTC có ba điểm N, K, E thẳng hàng:

$$\frac{KT}{KB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{ET} = 1.$$

Chú ý $CN = CE$ nên $\frac{KT}{KB} \cdot \frac{NB}{ET} = 1$ hay thu được $KT \cdot BN = KB \cdot ET$.

c) Ta có

$$\widehat{AEF} = \widehat{NEC} = \widehat{NME} = \widehat{MDA};$$

tương tự $\widehat{AMD} = \widehat{AFE}$ nên $\triangle AEF \sim \triangle ADM$ (g-g), suy ra

$$AF \cdot AD = AE \cdot AM = AE^2 = AH \cdot AI,$$

suy ra H là trực tâm tam giác IDF . Điều này dẫn tới $\widehat{IOF} = 90^\circ = \widehat{IAF}$ nên bốn điểm A, O, I, F cùng thuộc một đường tròn.

□



Câu 5

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) - \sqrt{11 + \frac{4}{xyz}}$$

Lời giải. Ta trình bày hai cách giải.

CÁCH 1. Ta sẽ chứng minh $T \geq \sqrt{2}$

Bất đẳng thức tương đương:

$$\sqrt{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq \sqrt{2xyz} + \sqrt{4 + 11xyz}$$

$$2(x + y + z) + 4(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \geq 13xyz + 4 + 2\sqrt{2xyz(11xyz + 4)}$$

Vì $x + y + z = 2$, thay vào vế trái và rút gọn số 4 ở hai vế, ta cần chứng minh

$$4(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \geq 13xyz + 2\sqrt{2xyz(11xyz + 4)}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$VT = 4(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \geq 12\sqrt[3]{xyz}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$12\sqrt[3]{xyz} \geq 13xyz + 2\sqrt{2xyz(11xyz + 4)}$$

$$12 \geq 13\sqrt[3]{(xyz)^2} + 2\sqrt{(11xyz + 4)} \cdot 2 \cdot \sqrt[6]{xyz}$$

Bất đẳng thức cuối này đúng do $xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27} = \frac{8}{27}$.

CÁCH 2. Đặt $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$, $c = \sqrt{z}$ thì $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ và

$$T = \frac{\sqrt{2}(a + b + c) - \sqrt{11a^2b^2c^2 + 4}}{abc}.$$

Vì $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 2$ nên ta có

$$\begin{aligned} 4abc(a + b + c) + 9a^2b^2c^2 &\leq \frac{4}{3}(ab + bc + ca)^2 + \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^3 \\ &\leq (ab + bc + ca) \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} \right) \\ &= 4(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$11a^2b^2c^2 + 4 \leq 4(ab + bc + ca) - 4abc(a + b + c) + 4 + 2a^2b^2c^2 = 2(a + b + c - abc)^2$$

Suy ra $\sqrt{11a^2b^2c^2 + 4} \leq \sqrt{2}(a + b + c - abc)$. Khi đó, ta có

$$T = \frac{\sqrt{2}(a + b + c) - \sqrt{11a^2b^2c^2 + 4}}{abc} \geq \frac{\sqrt{2}abc}{abc} = \sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{\frac{2}{3}}$, hay $x = y = z = \frac{2}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\sqrt{2}$. $\square$

Câu 6

Trên mặt phẳng cho 18 điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua hai điểm bất kì ta vẽ được một đoạn thẳng và trên đoạn thẳng đó ghi một số nguyên bất kì lớn hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các cạnh là các đoạn thẳng đã vẽ và tổng các số ghi trên các cạnh của tam giác đó là hợp số.

Lời giải. Ta thực hiện tô màu các đoạn thẳng bởi 3 màu theo quy tắc sau: Các đoạn thẳng được đánh số chia hết cho 3 sẽ được tô màu xanh, các đoạn thẳng được đánh số chia 3 dư 1 sẽ được tô màu đỏ, và các đoạn thẳng được đánh số chia 3 dư 2 sẽ được tô màu vàng.

Ta có các bổ đề sau.

Bổ đề 1: Trên mặt phẳng cho 6 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tô màu các đoạn thẳng nối 2 trong 6 điểm đã cho bởi 2 màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng, tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng màu.

Chứng minh Bổ đề 1. Gọi 6 điểm là A, B, C, D, E, F . Xét 5 đoạn thẳng AB, AC, AD, AE, AF được tô bởi 2 màu, theo nguyên lý Dirichlet, phải có ít nhất 3 đoạn thẳng cùng màu. Không mất tính tổng quát, giả sử AB, AC, AD có màu đỏ.

Nếu BC, CD, BD có một đoạn màu đỏ, giả sử là BD , thì tam giác ABD sẽ có 3 cạnh màu đỏ.

Nếu cả 3 đoạn BC, CD, BD có màu xanh thì tam giác BCD có cả 3 cạnh màu xanh. $\square$

Bổ đề 2: Trên mặt phẳng cho 17 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tô màu các đoạn thẳng nối 2 trong 17 điểm đã cho bởi 3 màu xanh, đỏ hoặc vàng. Chứng minh rằng, tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng màu.

Chứng minh Bổ đề 2. Gọi 17 điểm là $A_1, A_2, \dots, A_{17}$. Xét 16 đoạn thẳng $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_{17}$ được tô bởi 3 màu, theo nguyên lý Dirichlet, phải có ít nhất 6 đoạn thẳng cùng màu. Không mất tính tổng quát, giả sử $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_7$ đều có màu đỏ.

Nếu trong các đoạn thẳng nối 2 trong 6 điểm $A_2, A_3, \dots, A_7$ có ít nhất một đoạn thẳng màu đỏ, không mất tính tổng quát, giả sử là A_2A_3 . Khi đó, tam giác $A_1A_2A_3$ là tam giác có 3 cạnh màu đỏ.

Nếu như các đoạn thẳng nối 2 trong 6 điểm $A_2, A_3, \dots, A_7$ không có đoạn nào màu đỏ, tức là các đoạn thẳng này được tô bởi 2 màu xanh hoặc vàng. Theo **Bổ đề 1**, tồn tại một tam giác tạo từ 3 trong 6 đỉnh này có 3 cạnh cùng màu. $\square$

Quay lại bài toán, ta thấy khi đó phải có 1 tam giác với đỉnh nằm trong 18 đỉnh đã cho có 3 cạnh cùng màu. Khi đó, số đánh trên 3 cạnh của tam giác này là đồng dư, cho nên tổng của các số đó là chia hết cho 3. Mà tổng này cũng lớn hơn 3 (do các số đánh trên cạnh đều lớn hơn 1), nên tổng này là hợp số. $\square$

Tích Kiên Thức - Trữ Niềm Vui