

Câu 1 (2,0 điểm).

a. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4} - \frac{8\sqrt{x}-14}{x+\sqrt{x}-20}$.

b. Cho phương trình $x^2 + 2(m+5)x + m^2 + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 144$.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^{2n} + (2x+1)^n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng, $P(x)$ chia hết cho đa thức $x+1$. Chứng minh rằng, $P(2027) - 4$ chia hết cho 5.

Câu 3 (1,0 điểm). Có một nhóm 6 người gồm An, Bình, Cường, Duyên, Mai, Nam. Nếu người này kết bạn với người kia thì 2 người đó là bạn của nhau. Trong nhóm này, An chỉ kết bạn với Nam và Bình; Cường chỉ kết bạn với Bình và Duyên; Mai chỉ kết bạn với Nam và Duyên. Trong 3 người Bình, Nam, Duyên mỗi người là bạn với đúng 2 người khác trong nhóm 6 người trên. Trong 3 người An, Cường, Mai không có 2 người nào là bạn của nhau. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 người trong nhóm 6 người trên. Tính xác suất của biến cố X : “2 người được chọn không là bạn của nhau”.

Câu 4 (2,0 điểm).

a. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $4a^2 + b^2 + c^2 - 9 = 5ab + 2bc + 4ca$. Chứng minh rằng, $ab+1$ và $ab+4a+2b-2c+10$ đều là các số chính phương.

b. Chứng minh rằng, không tồn tại số nguyên n để $n+2026$ và $n-2$ đều là lập phương của các số nguyên.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) có AB là một dây cung không đi qua tâm của đường tròn. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại các điểm A, B cắt nhau tại điểm M . Kẻ tia Mx nằm giữa hai tia MA, MB . Gọi C và D là giao điểm của tia Mx với đường tròn (O) sao cho điểm C nằm giữa hai điểm M và D . Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng CD .

a. Chứng minh rằng, năm điểm M, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn và EM là tia phân giác của $\widehat{AEB}$.

b. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AB và MO . Đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm $F (F \neq C)$. Chứng minh rằng, $MC \cdot MD = MH \cdot MO$ và đường thẳng DF song song với đường thẳng AB .

c. Đường thẳng DF cắt các tia MA, MB tương ứng tại các điểm P, Q . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng EP và AD ; J là giao điểm của hai đường thẳng EQ và BD . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng IJ . Chứng minh rằng, ba điểm H, K, D thẳng hàng.

Câu 6 (1,0 điểm). Xác định tất cả các tập hợp X thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Tập hợp X có 2026 phần tử. Các phần tử là các số thực dương. Tổng của tất cả các phần tử của tập hợp X bằng 2027.

ii) Với hai phần tử phân biệt bất kỳ a, b thuộc tập hợp X thì có ít nhất một trong hai số $|a-b|, a+b$ cũng thuộc tập hợp X .

----- HẾT -----

CHUYÊN TOÁN THÁI NGUYÊN - 2026

Bài tập 1 (Lim Olympic - Thái Nguyên - Bài 1)

- ① Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4} - \frac{8\sqrt{x}-14}{x+\sqrt{x}-20}$.
- ② Cho phương trình $x^2 + 2(m+5)x + m^2 + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 144$.

 Lời giải.

- ① Ta có $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$.
- ② Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$.
Tương đương $9m + 27 > 0$ hay $m > -3$.
Theo Viète ta có $x_1 + x_2 = -2(m+5)$ và $x_1x_2 = m^2 + m - 2$.
Do đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2m^2 + 38m + 104$.
Suy ra $2m^2 + 38m - 40 = 0$ hay $2(m-1)(m+20) = 0$.
Kết hợp $m > -3$ ta có $m = 1$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Bài tập 2 (Lim Olympic - Thái Nguyên - Bài 2)

Cho đa thức $P(x) = x^{2n} + (2x+1)^n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng $P(x)$ chia hết cho đa thức $x+1$. Chứng minh rằng, $P(2027) - 4$ chia hết cho 5.

 Lời giải.

Ta có $P(-1) = 0$ nên $1 + (-1)^n = 0$ hay n lẻ.
Cũng có $P(2027) - 4 = 2027^{2n} + 4055^n - 4 \equiv 2^{2n} - 4 \equiv (-1)^n - 4 \equiv -5 \equiv 0 \pmod{5}$.
Do đó $P(2027) - 4$ chia hết cho 5.

Bài tập 3 (Lim Olympic - Thái Nguyên - Bài 3)

Có một nhóm 6 người gồm An, Bình, Cường, Duyên, Mai, Nam. Nếu hai người này kết bạn với người kia thì 2 người đó là bạn của nhau. Trong nhóm này, An chỉ kết bạn với Nam và Bình; Cường chỉ kết bạn với Bình và Duyên; Mai chỉ kết bạn với Nam và Duyên. Trong 3 người Bình, Nam, Duyên mỗi người là bạn với đúng 2 người khác trong nhóm 6 người trên. Trong 3 người An, Cường, Mai không có 2 người nào là bạn của nhau. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 người trong nhóm 6 người trên. Tính xác suất của biến cố X : "2 người được chọn không là bạn của nhau".

Lời giải.

Ta gọi kí hiệu tên viết tắt đại diện của các bạn An, Bình, Cường, Duyên, Mai, Nam lần lượt là: A, B, C, D, M, N .

Ta kí hiệu XY để chỉ hai bạn X và Y có thể quen nhau.

Ta có các cặp bạn bè theo giả thiết: $AN; AB; CB; CD; MN; MD$. (*)

Từ giả thiết, ta cũng có: Trong ba người Bình, Nam, Duyên, mỗi người là bạn với đúng 2 người khác trong nhóm 6 người. Ta có: $BA, BC; NM, NA; DC, DM$. Nên ta có: Bình, Nam, Duyên đều có hai bạn khác trong nhóm sáu người.

Ta xét giả thiết cuối: An, Mai, Cường không có 2 người nào là bạn của nhau tức là không tồn tại AM, AC, MC .

Vậy tức là sáu cặp bạn bè ở (*) đều thỏa mãn đề bài.

Do đó có sáu cặp bạn bè từ sáu người trong nhóm.

Vậy ta có xác suất của biến cố X : "2 người được chọn không là bạn của nhau" là:

$$\frac{C_6^2 - 6}{C_6^2} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Lưu ý.

Có lẽ đề thừa giả thiết cuối, trong ba người An, Cường, Mai không có 2 người nào là bạn của nhau.

Bài tập 4 (Lim Olympic - Thái Nguyên - Bài 4)

- ① Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $4a^2 + b^2 + c^2 - 9 = 5ab + 2bc + 4ca$. Chứng minh rằng, $ab + 1$ và $ab + 4a + 2b - 2c + 10$ đều là các số chính phương.
- ② Chứng minh rằng, không tồn tại số nguyên n để $n + 2026$ và $n - 2$ đều là lập phương của các số nguyên.

Lời giải.

- ① Biểu thức ban đầu tương đương $4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab - 4ac - 2bc = 9ab + 9$.

Tương đương $(2a + b - c)^2 = 9(ab + 1)$.

Vì thế $9(ab + 1)$ là số chính phương hay $ab + 1$ là số chính phương.

Mặt khác $A = ab + 4a + 2b - 2c + 10 = (ab + 1) + 2(2a + b - c) + 9$.

- ◇ Nếu $2a + b - c = 3\sqrt{ab + 1}$ thì $A = (ab + 1) + 6\sqrt{ab + 1} + 9 = (\sqrt{ab + 1} + 3)^2$ là số chính phương.
- ◇ Nếu $2a + b - c = -3\sqrt{ab + 1}$ thì $A = (ab + 1) - 6\sqrt{ab + 1} + 9 = (\sqrt{ab + 1} - 3)^2$ là số chính phương.

- ② Giả sử $n - 2$ và $n + 2026$ đều là lập phương đúng nên đồng thời $n - 2 \equiv 0, 1, 8 \pmod{9}$ và $n + 2026 \pmod{9}$.

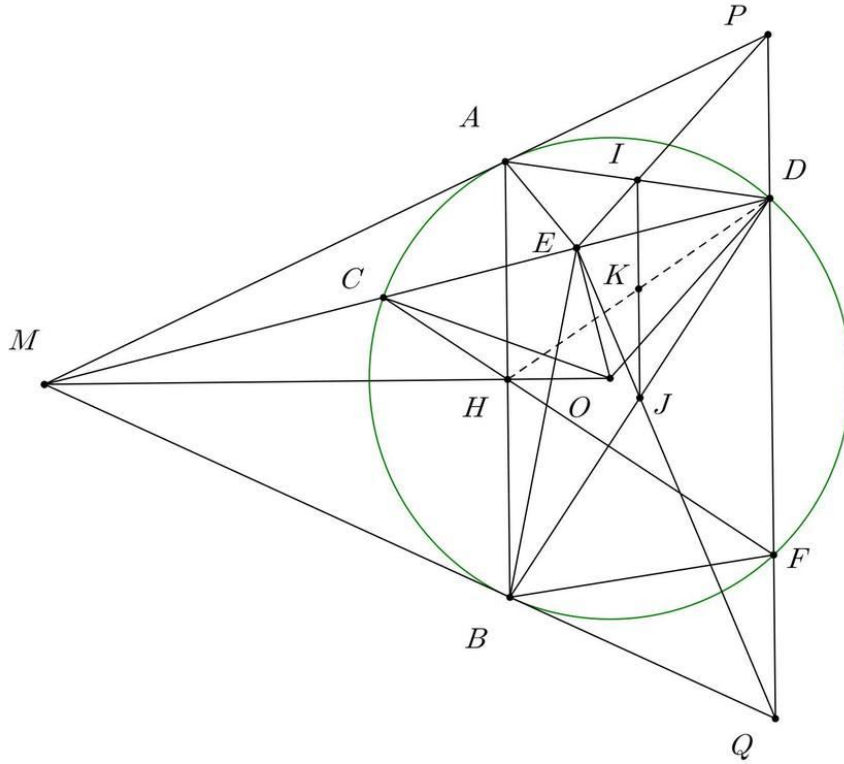
Từ đó suy ra đồng thời $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{9}$ và $n \equiv 0, 7, 8 \pmod{9}$, vô lý.

Do đó không tồn tại số nguyên n thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài tập 5 (Lim Olympic - Thái Nguyên - Bài 5)

Cho đường tròn (O) có AB là một dây cung không đi qua tâm của đường tròn. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại các điểm A, B cắt nhau tại điểm M . Kẻ tia Mx nằm giữa hai tia MA, MO . Gọi C và D là giao điểm của tia Mx với đường tròn (O) sao cho điểm C nằm giữa hai điểm M và D . Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng CD .

- ① Chứng minh rằng, năm điểm M, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn và EM là tia phân giác của $\widehat{AEB}$.
- ② Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AB và MO . Đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm F ($F \neq C$). Chứng minh rằng, $MC \cdot MD = MH \cdot MO$ và đường thẳng DF song song với đường thẳng AB .
- ③ Đường thẳng DF cắt các tia MA, MB tương ứng tại các điểm P, Q . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng EP và AD ; J là giao điểm của hai đường thẳng EQ và BD . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng IJ . Chứng minh rằng, ba điểm H, K, D thẳng hàng.



Lời giải.

- ① 5 điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO nên $\widehat{AEM} = \widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \widehat{MEB}$ nên EM là phân giác $\widehat{AEB}$.
- ② Áp dụng hệ thức lượng ta có $MC \cdot MD = MA^2 = MH \cdot MO$ nên tứ giác $CHOD$ nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{CHM} = \widehat{CDO} = \widehat{DCO} = \widehat{DHO} \Rightarrow 90^\circ - \widehat{CHM} = 90^\circ - \widehat{DHO} \Rightarrow \widehat{CHA} = \widehat{DHA} = \frac{\widehat{CHD}}{2} = \frac{\widehat{COD}}{2} = \widehat{CFD} \Rightarrow \widehat{CHA} = \widehat{CFD} \Rightarrow AH \parallel DF \Rightarrow DF \parallel AB$.
- ③ Áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle MAD$ với P, I, E thẳng hàng ta được

$$\frac{PM}{PA} \cdot \frac{IA}{ID} \cdot \frac{ED}{EM} = 1 \Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{PM}{PA} \cdot \frac{ED}{EM} \quad (1)$$

Áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle MBD$ với E, J, Q thẳng hàng ta được

$$\frac{QM}{QB} \cdot \frac{JB}{JD} \cdot \frac{ED}{EM} = 1 \Rightarrow \frac{JD}{JB} = \frac{QM}{QB} \cdot \frac{ED}{EM} \quad (2)$$

Mà $\frac{PM}{PA} = \frac{QM}{QB}$ do $PQ \parallel AB$ nên từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{JD}{JB} \Rightarrow IJ \parallel AB \Rightarrow H, K, D$ thẳng hàng theo bổ đề hình thang.

Bài tập 6 (Lim Olympic - Thái Nguyên - Bài 6)

Xác định tất cả các tập hợp X thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- ◇ Tập hợp X có 2026 phần tử. Các phần tử là các số thực dương. Tổng của tất cả các phần tử của tập hợp X bằng 2027.
- ◇ Với hai phần tử phân biệt bất kỳ a, b thuộc tập hợp X thì có ít nhất một trong hai số $|a - b|$, $a + b$ cũng thuộc tập hợp X .

Lời giải.

Giả sử tập hợp X gồm 2026 phần tử thực dương, sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2026}\} \quad \text{với} \quad 0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2026}$$

Ta có: $x_1 + x_2 + \dots + x_{2026} = 2027$.

Nhận xét 1: $x_i + x_{2026-i} = x_{2026}$ với mọi $i = \overline{1, 2025}$.

Chứng minh.

Thật vậy, vì $x_i + x_{2026} > x_{2026}$ nên $x_i + x_{2026} \notin X$ hay

$$x_{2026} - x_i \in X \quad \forall i = \overline{1, 2025}$$

Chú ý rằng:

$$0 < x_{2026} - x_{2025} < x_{2026} - x_{2024} < \dots < x_{2026} - x_1 < x_{2026}$$

và 2025 phần tử này đều thuộc x . Do đó $x_{2026} - x_i = x_{2026-i}$ hay

$$x_i + x_{2026-i} = x_{2026} \quad \forall i = \overline{1, 2025}$$

□

Nhận xét 2: $x_k = k \cdot x_1$ với mọi $k = \overline{1, 2026}$.

Chứng minh.

Thật vậy, xét $x_{2024} + x_{2025} = 2x_{2026} - (x_1 + x_2) > 2x_{2026} - (x_1 + x_{2025}) = x_{2026}$.

Vì vậy $x_{2024} + x_{2025} \notin X$ hay $x_{2025} - x_{2024} \in X$ hay $(x_{2026} - x_1) - (x_{2026} - x_2) \in X$.

Suy ra $x_2 - x_1 \in X$, mà $x_2 - x_1 < x_2$ nên

$$x_2 - x_1 = x_1 \implies x_2 = 2x_1$$

Từ $x_2 = 2x_1$, kết hợp với **Nhận xét 1**, ta suy ra được:

$$x_k = k \cdot x_1 \quad \forall k = \overline{1, 2026}$$

□

Vì thế ta có được:

$$2027 = \sum_{k=1}^{2026} x_k = \sum_{k=1}^{2026} (k \cdot x_1) = x_1 \cdot \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 1013 \cdot 2027 \cdot x_1 \iff x_1 = \frac{1}{1013}$$

Vậy tập hợp X cần tìm là:

$$X = \left\{ \frac{1}{1013}, \frac{2}{1013}, \frac{3}{1013}, \dots, \frac{2026}{1013} \right\}$$