

NĂM HỌC 2026 – 2027

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 02 trang)

Môn thi: TOÁN (chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút

(không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 03 tháng 06 năm 2026

Câu 1. (1,5 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{4\sqrt{x}}{x-4} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ (với $x > 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên dương.

Câu 2. (2,0 điểm).

a) Biết phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Không giải phương trình, hãy

tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{1}{x_1^2 - 4x_1 + 5} + \frac{1}{x_2^2 - 4x_2 + 5}$.

b) Theo kế hoạch, một tổ công nhân phải làm 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, năng suất của tổ đã vượt năng suất dự định 3 sản phẩm mỗi ngày. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 4 ngày. Thực tế mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

Câu 3. (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + 2x = 2y^2 + 4y \\ 2\sqrt{2y+3} = x - y + 3 \end{cases}$$

Câu 4. (2,5 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ADE của (O) sao cho D nằm giữa A và E , đồng thời tia AE nằm giữa hai tia AB và AO . Gọi H là giao điểm của AO và BC , K là trung điểm của đoạn thẳng DE .

a) Chứng minh năm điểm A, B, O, C, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AE và BC . Chứng minh $AH \cdot AO = AI \cdot AK$.

c) Đường thẳng CK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F . Chứng minh đường thẳng BF song song với đường thẳng AE .

Câu 5. (1,0 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn phương trình sau:

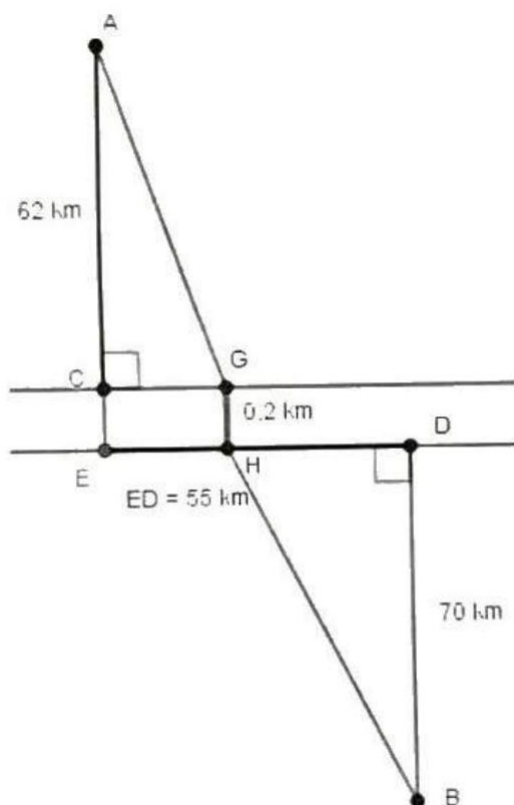
$$2x^2 - y^2 - xy + 3x = 6.$$

Câu 6. (1,0 điểm).

a) Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 2$. Chứng minh: $\frac{1}{2x+y} + \frac{1}{x+2y} \geq \frac{2}{3}$.

b) Cho $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2}{x+1} - \frac{9}{2(x+3)}$.

Câu 7. (1,0 điểm). Để kết nối giao thương sau khi sáp nhập hai tỉnh, người ta dự định xây dựng một tuyến đường cao tốc nối từ thành phố A đến thành phố B của hai tỉnh đó. Tuyến đường này phải vượt qua một con sông. Giả sử đoạn sông chảy qua khu vực này có hai bờ song song với nhau và bề rộng mặt sông là 200 mét. Cây cầu bắc qua sông yêu cầu phải được thiết kế vuông góc với bờ sông (xem hình vẽ bên dưới). Biết rằng, khoảng cách từ thành phố A đến bờ sông gần nhất là 62 km, khoảng cách từ thành phố B đến bờ sông gần nhất là 70 km. Hình chiếu vuông góc của A và B trên cùng một bờ sông cách nhau 55 km. Giả sử người ta xây dựng được cây cầu tại vị trí phù hợp đảm bảo tuyến đường giao thông ngắn nhất đi từ A đến B (bao gồm hai đoạn đường bộ và chiều dài cây cầu). Hỏi tuyến đường đó dài bao nhiêu kilômét?



--- HẾT ---

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Giám thị không giải thích gì thêm.

Bài tập 9 (Lim Olympic - Tây Ninh - Bài 1)

Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{4\sqrt{x}}{x-4} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \quad (x > 0, x \neq 4)$$

- ① Rút gọn biểu thức P .
- ② Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên dương.

Lời giải.

- ① Ta có $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$.
- ② Để thấy để P nguyên dương thì $\sqrt{x}$ là số hữu tỉ, nên $\sqrt{x}$ là số nguyên dương.

Khi đó $P = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}$ nên $\sqrt{x}-2 \in \{1, -1, 5, -5\}$.

Giải từng trường hợp và kiểm tra điều kiện có $x = 9$ và $x = 49$ thỏa mãn.

Bài tập 10 (Lim Olympic - Tây Ninh - Bài 2)

- ① Biết phương trình: $x^2 - 5x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{1}{x_1^2 - 4x_1 + 5} + \frac{1}{x_2^2 - 4x_2 + 5}$$

- ② Theo kế hoạch, một tổ công nhân phải làm 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, năng suất của tổ đã vượt năng suất dự định 3 sản phẩm mỗi ngày. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 4 ngày. Thực tế mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải.

- ① Ta có $x_i^2 - 4x_i + 5 = (x_i^2 - 5x_i + 2) + x_i + 3 = x_i + 3$ với $i \in \{1, 2\}$.

$$\text{Do đó } A = \frac{1}{x_1+3} + \frac{1}{x_2+3} = \frac{x_1+x_2+6}{x_1x_2+3(x_1+x_2)+9} = \frac{5+6}{2+15+9} = \frac{11}{26}.$$

- ② Gọi năng suất dự định là x sản phẩm/ngày, $x > 0$.

$$\text{Khi đó } \frac{240}{x} - \frac{240}{x+3} = 4, \text{ suy ra } x = 12.$$

Do đó năng suất thực tế là $12 + 3 = 15$ sản phẩm/ngày.

Bài tập 11 (Lim Olympic - Tây Ninh - Bài 3)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + 2x = 2y^2 + 4y \\ 2\sqrt{2y + 3} = x - y + 3 \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $y \geq -\frac{3}{2}$.

Từ phương trình đầu ta có $x(y + 2) = 2y(y + 2)$, vì $y + 2 > 0$ nên $x = 2y$.

Thay vào phương trình còn lại suy ra $2\sqrt{2y + 3} = y + 3$.

Bình phương hai vế ta được $4(2y + 3) = (y + 3)^2$ hay $y^2 - 2y - 3 = 0$ hay $(y - 3)(y + 1) = 0$.

Giải từng trường hợp suy ra nghiệm của hệ phương trình trên là

$$(x; y) \in \{(-2; -1), (6; 3)\}$$

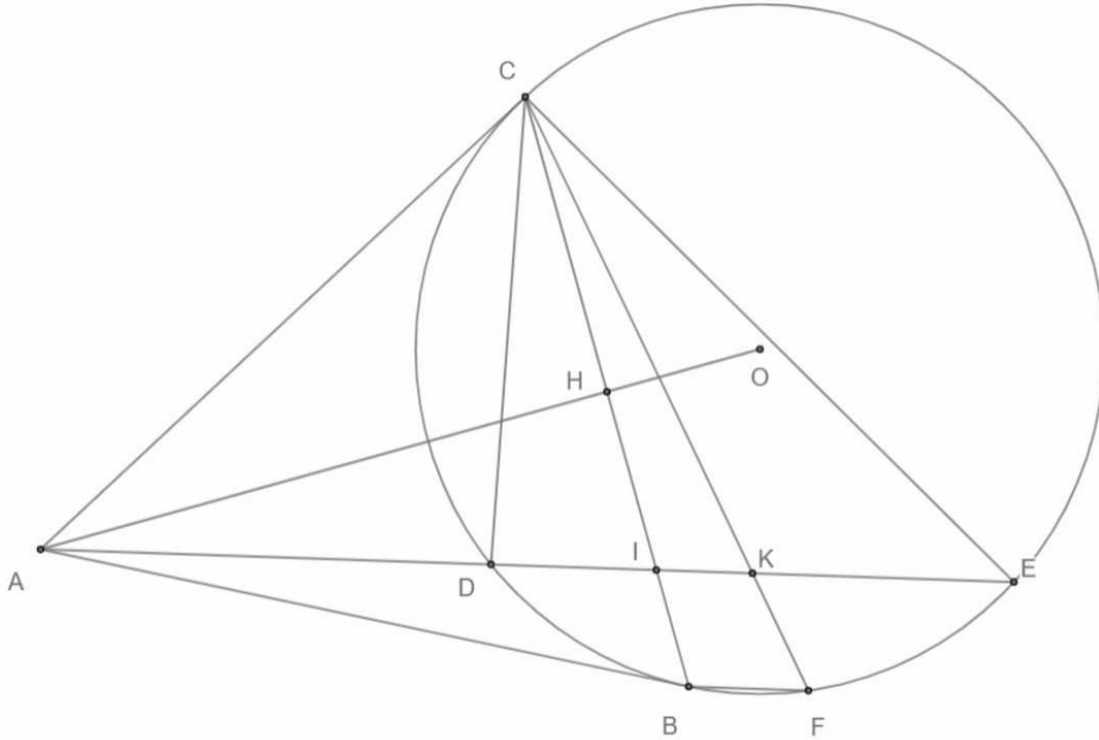
Bài tập 12 (Lim Olympic - Tây Ninh - Bài 4)

Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ADE của (O) sao cho D nằm giữa A và E , đồng thời tia AE nằm giữa hai tia AB và AO . Gọi H là giao điểm của tia AO và BC , K là trung điểm của đoạn thẳng DE .

- ① Chứng minh năm điểm A, B, O, C, K cùng thuộc một đường tròn.
- ② Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AE và BC . Chứng minh:

$$AH \cdot AO = AI \cdot AK$$

- ③ Đường thẳng CK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F . Chứng minh đường thẳng BF song song với đường thẳng AE .



Lời giải.

- ① Năm điểm trên cùng thuộc đường tròn đường kính AO.
- ② Ta có OHIK nội tiếp nên $AH \cdot AO = AI \cdot AK$.
- ③ Ta có $AI \cdot AK = AH \cdot AO = AC^2$ nên $\triangle ACI \sim \triangle AKC$.

Khi đó $\widehat{ACI} = \widehat{AKC}$ nên $\widehat{DCI} = \widehat{ACI} - \widehat{ACD} = \widehat{AKC} - \widehat{CED} = \widehat{KCE}$.

Do đó IK song song BF nên có điều phải chứng minh.

Bài tập 13 (Lim Olympic - Tây Ninh - Bài 5)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn phương trình:

$$2x^2 - y^2 - xy + 3x = 6$$

Lời giải.

Từ đề bài ta có:

$$y^2 + xy - (2x^2 + 3x - 6) = 0$$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn y tham số x , ta có:

$$\Delta_y = x^2 - 4.1.[-(2x^2 + 3x - 6)] = x^2 + 8x^2 + 12x - 24 = 9x^2 + 12x - 24$$

Giả sử $\Delta_y = k^2$ là số chính phương với $k \in \mathbb{N}$:

$$9x^2 + 12x - 24 = k^2 \Leftrightarrow (3x + 2)^2 - 28 = k^2 \Leftrightarrow (3x + 2)^2 - k^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow (3x + 2 - k)(3x + 2 + k) = 28$$

Vì $x \geq 1$ nên $3x + 2 \geq 5$. Đồng thời $(3x + 2 - k)$ và $(3x + 2 + k)$ có cùng tính chẵn lẻ và tích của chúng là 28 (số chẵn), do đó cả hai thừa số đều phải là số chẵn. Hơn nữa, vì $k \geq 0$ nên $3x + 2 + k \geq 3x + 2 - k$. Do đó, ta có hệ phương trình duy nhất:

$$\begin{cases} 3x + 2 + k = 14 \\ 3x + 2 - k = 2 \end{cases} \Rightarrow 2(3x + 2) = 16 \Rightarrow 3x + 2 = 8 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

Thay vào phương trình ban đầu suy ra $y = 2$ (do $y > 0$).

Vậy cặp số nguyên dương duy nhất thỏa mãn là $(x; y) = (2; 2)$.

Bài tập 14 (Lim Olympic - Tây Ninh - Bài 6)

- ① Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 2$. Chứng minh:

$$\frac{1}{2x + y} + \frac{1}{x + 2y} \geq \frac{2}{3}$$

- ② Cho $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{x + 1} - \frac{9}{2(x + 3)}$$

Lời giải.

- ① Ta có $\frac{1}{2x + y} + \frac{1}{x + 2y} \geq \frac{4}{3x + 3y} \geq \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

- ② Đặt $t = x + 1$. Vì $x > 0$ nên $t > 1$. Khi đó: $P = \frac{2}{t} - \frac{9}{2(t + 2)}$. Ta có:

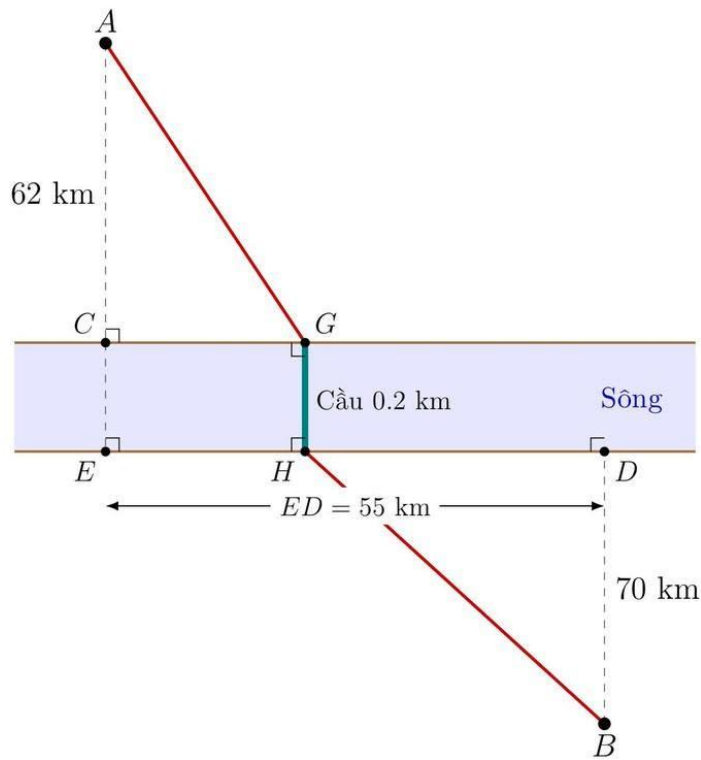
$$\begin{aligned} P + \frac{1}{4} &= \frac{2}{t} - \frac{9}{2(t + 2)} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{8(t + 2) - 18t + t(t + 2)}{4t(t + 2)} \\ &= \frac{8t + 16 - 18t + t^2 + 2t}{4t(t + 2)} \\ &= \frac{t^2 - 8t + 16}{4t(t + 2)} = \frac{(t - 4)^2}{4t(t + 2)} \geq 0 \end{aligned}$$

Do đó $P \geq -\frac{1}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $x = 3$.

Bài tập 15 (Lim Olympic - Tây Ninh - Bài 7)

Để kết nối giao thương sau khi sáp nhập hai tỉnh, người ta dự định xây dựng một tuyến đường cao tốc nối từ thành phố A đến thành phố B của hai tỉnh đó. Tuyến đường này phải vượt qua một con sông. Giả sử dòng sông chảy qua khu vực này có hai bờ song song với nhau và bề rộng mặt sông là 200 mét (0.2 km). Cây cầu bắc qua sông yêu cầu phải được thiết kế vuông góc với bờ sông (xem hình vẽ bên dưới). Biết rằng, khoảng cách từ thành phố A đến sông gần nhất là 62 km, khoảng cách từ thành phố B đến bờ sông gần nhất là 70 km. Hình chiếu vuông góc của A và B trên cùng một bờ sông cách nhau 55 km ($ED = 55$ km). Giả sử người ta xây dựng cầu tại vị trí phù hợp đảm bảo tuyến đường giao thông ngắn nhất đi từ A đến B (bao gồm hai đoạn đường bộ và chiều dài cây cầu). Hỏi tuyến đường đó dài bao nhiêu kilômét?



Lời giải.

Gọi G, H là hai đầu cầu, trong đó GH vuông góc với hai bờ sông. Ta có $GH = 0,2$ km.

Ta cần chọn vị trí cầu sao cho tổng độ dài tuyến đường $AG + GH + HB$ nhỏ nhất. Vì GH không đổi nên bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $AG + HB$.

Giả sử $CG = x$ (km), $0 \leq x \leq 55$. Khi đó $HD = 55 - x$ (km).

Ta có $AG = \sqrt{62^2 + x^2}$ và $HB = \sqrt{70^2 + (55 - x)^2}$.

Theo bất đẳng thức Mincopxki ta có $AG + HB \geq \sqrt{(62 + 70)^2 + (x + 55 - x)^2} = 143$.

Vậy độ dài tuyến đường ngắn nhất là

$$AG + GH + HB = 143 + 0,2 = 143,2 \text{ km.}$$

Dấu bằng chẳng hạn khi $\frac{x}{62} = \frac{55 - x}{70}$ hay $x = \frac{1705}{66}$ (km).