

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

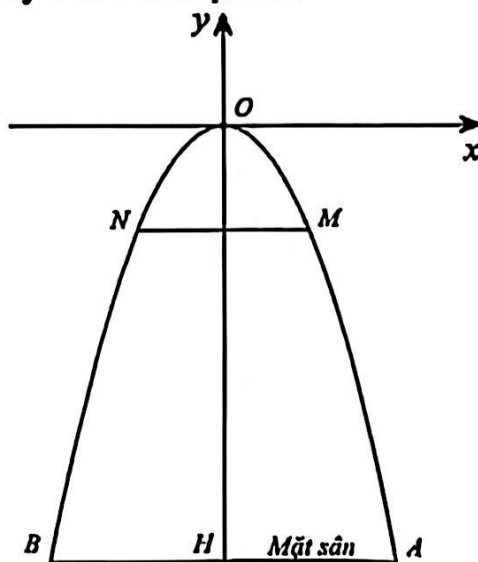
b) Với những giá trị nào của x thì biểu thức $P = \frac{6}{A}$ nhận giá trị nguyên?

Câu 2. (1,0 điểm) Hai đội công nhân dệt may cần sản xuất một số lượng khẩu trang theo đơn đặt hàng. Nếu làm chung thì sau 4 giờ họ sẽ làm xong. Nhưng hai đội mới làm chung được 3 giờ thì đội I nghỉ, đội II tiếp tục làm trong 3 giờ nữa mới xong. Hỏi mỗi đội nếu làm một mình thì phải bao lâu mới xong công việc?

Câu 3. (1,0 điểm)

1. Cho phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = 3x_1x_2^2 + x_1 + x_2(3x_1^2 + 1)$.

2. Ở một hội chợ thương mại, người ta dựng trên mặt sân một cái cổng có dạng parabol $y = ax^2$ (Hình 1). Biết cổng có chiều cao $OH = 6$ m và khoảng cách giữa hai chân cổng $AB = 4$ m. Người ta treo trên cổng một dây đèn trang trí $MN = 2$ m song song với AB . Tính giá trị của a và khoảng cách từ dây đèn đến mặt sân.



Hình 1

Câu 4. (1,0 điểm) Một hộp chứa 8 thẻ được đánh số từ 1 đến 8. Rút ngẫu nhiên lần lượt hai thẻ từ hộp không hoàn lại. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) A : “Tổng hai số ghi trên hai thẻ là một số chia hết cho 10”.

b) B : “Tích hai số ghi trên hai thẻ lớn hơn ba lần tổng của chúng đúng 1 đơn vị”.

Câu 5. (4,0 điểm)

1. Một cơ sở sản xuất nệm thơm thiết kế một mẫu quà tặng cao cấp. Mỗi bộ sản phẩm gồm một hộp nhựa hình trụ trong suốt và một viên nệm thơm có dạng hình cầu được đặt vào bên trong hình trụ sao cho nằm vừa khít, tiếp xúc với mặt đáy và mặt xung quanh của hộp (Hình 2). Viên nệm này có bán kính $R = 4\text{ cm}$.

a) Tính thể tích của hộp nhựa hình trụ và thể tích của viên nệm hình cầu. (Lấy $\pi = 3,14$ và theo đơn vị cm^3 , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

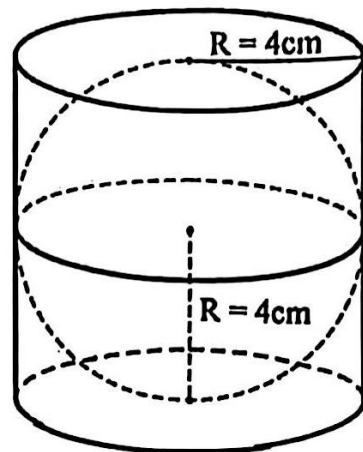
b) Để cố định viên nệm và trang trí, cơ sở sản xuất đổ đầy phần không gian trống giữa viên nệm và hộp nhựa bằng các hạt sếp màu li ti. Biết mỗi 100 cm^3 hạt sếp màu có giá là 15 000 đồng. Tính chi phí tiền mua hạt sếp màu để sản xuất 500 bộ quà tặng như trên. (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

2. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Kẻ đường kính CD vuông góc với AB . Lấy M thuộc cung nhỏ BC và AM cắt CD tại E . Qua D kẻ tiếp tuyến với (O) cắt đường thẳng BM tại N . Gọi P là hình chiếu vuông góc của B lên DN .

a) Chứng minh: Các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $EN \parallel CB$ và $AM \cdot BN = 2R^2$.

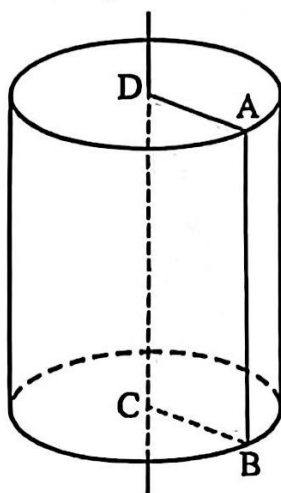
c) Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.



Hình 2

Câu 6. (1,0 điểm)

1. Một người thợ mộc tiện khối gỗ thành một hình trụ. Cắt hình trụ đó bởi một mặt phẳng chứa trục, ta được mặt cắt là một hình chữ nhật. Xét hình chữ nhật $ABCD$ được tạo bởi trục và một đường sinh của hình trụ (Hình 3). Biết chu vi của hình chữ nhật $ABCD$ bằng 12 cm. Hỏi thể tích lớn nhất của khối gỗ hình trụ này có thể đạt được là bao nhiêu?



Hình 3

2. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên. Chứng minh $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương.

_____ Hết _____

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
SƠN LA

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 3 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027

Môn thi: Toán

(Dành cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Toán)

Ngày thi: 02/06/2026

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Với những giá trị nào của x thì biểu thức $P = \frac{6}{A}$ nhận giá trị nguyên?

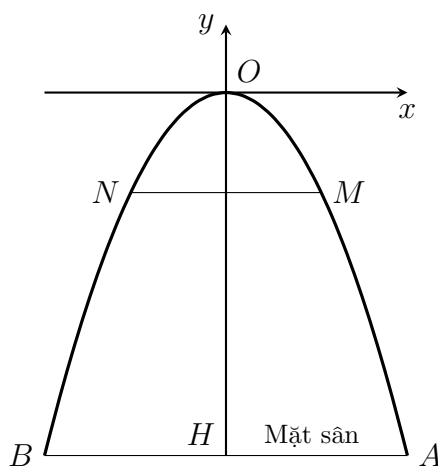
Câu 2. (1,0 điểm)

Hai đội công nhân dệt may cần sản xuất một số lượng khẩu trang theo đơn đặt hàng. Nếu làm chung thì sau 4 giờ họ sẽ làm xong. Nhưng hai đội mới làm chung được 3 giờ thì đội I nghỉ, đội II tiếp tục làm trong 3 giờ nữa mới xong. Hỏi mỗi đội nếu làm một mình thì phải bao lâu mới xong công việc?

Câu 3. (1,0 điểm)

1. Cho phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = 3x_1x_2^2 + x_1 + x_2(3x_1^2 + 1)$.

2. Ở một hội chợ thương mại, người ta dựng trên mặt sàn một cái cổng có dạng parabol $y = ax^2$ (Hình 1). Biết cổng có chiều cao $OH = 6$ m và khoảng cách giữa hai chân cổng $AB = 4$ m. Người ta treo trên cổng một dây đèn trang trí $MN = 2$ m song song với AB . Tính giá trị của a và khoảng cách từ dây đèn đến mặt sàn.



Hình 1

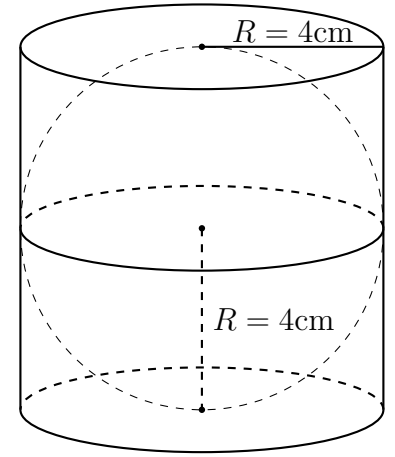
Câu 4. (1,0 điểm) Một hộp chứa 8 thẻ được đánh số từ 1 đến 8. Rút ngẫu nhiên lần lượt hai thẻ từ hộp không hoàn lại. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

1. A: “Tổng hai số ghi trên hai thẻ là một số chia hết cho 10”.

2. B: “Tích hai số ghi trên hai thẻ lớn hơn ba lần tổng của chúng đúng 1 đơn vị”.

Câu 5. (4,0 điểm)

1. Một cơ sở sản xuất nến thơm thiết kế một mẫu quà tặng cao cấp. Mỗi bộ sản phẩm gồm một hộp nhựa hình trụ trong suốt và một viên nến thơm có dạng hình cầu được đặt vừa khít bên trong hình trụ sao cho nằm vừa khít, tiếp xúc với mặt đáy và mặt xung quanh của hộp (Hình 2). Viên nến này có bán kính $R = 4\text{ cm}$.

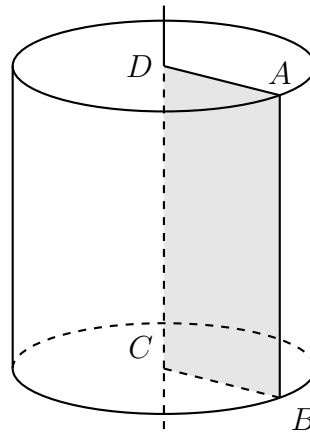


Hình 2

- Tính thể tích của hộp nhựa hình trụ và thể tích của viên nến hình cầu. (Lấy $\pi = 3,14$ và theo đơn vị cm^3 , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
 - Để cố định viên nến và trang trí, cơ sở sản xuất đó đổ đầy phần không gian trống giữa viên nến và hộp nhựa bằng các hạt sếp màu li ti. Biết mỗi 100 cm^3 hạt sếp màu có giá là 15 000 đồng. Tính chi phí tiền mua hạt sếp màu để sản xuất 500 bộ quà tặng như trên. (Đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
2. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Kẻ đường kính CD vuông góc với AB . Lấy M thuộc cung nhỏ BC và AM cắt CD tại E . Qua D kẻ tiếp tuyến với (O) cắt đường thẳng BM tại N . Gọi P là hình chiếu vuông góc của B lên DN .
- Chứng minh các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.
 - Chứng minh $EN \parallel CB$ và $AM \cdot BN = 2R^2$.
 - Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6. (1,0 điểm)

1. Một người thợ mộc tiện khối gỗ thành một hình trụ. Cắt hình trụ đó bởi một mặt phẳng chứa trục, ta được mặt cắt là một hình chữ nhật. Xét hình chữ nhật $ABCD$ được tạo bởi trục và một đường sinh của hình trụ (Hình 3). Biết chu vi của hình chữ nhật $ABCD$ bằng 12 cm. Hỏi thể tích lớn nhất của khối gỗ hình trụ này có thể đạt được là bao nhiêu?



Hình 3

2. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên. Chứng minh $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương.

..... **HẾT**

Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu. Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN SỞ GD & ĐT TỈNH SƠN LA NĂM 2026

Giáo viên: Trương Hoàng Vĩnh - Email: Vinhtruonghoang216@gmail.com

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Với những giá trị nào của x thì biểu thức $P = \frac{6}{A}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải:

1.

– Với $x > 0, x \neq 1$ ta được:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \\ A &= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x+1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ A &= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ A &= \frac{x+1+x+1+\sqrt{x}-x-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ A &= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2.

– Ta có: $P = \frac{6}{A} = \frac{6}{\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}}$. Biểu thức P nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $6: \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \in \{1; 2; 3; 6\} \text{ do } \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} > 0.$$

– Trường hợp: $\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x+2\sqrt{x}+1 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1 = 0$ (Vô nghiệm).

Trường hợp: $\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow x+2\sqrt{x}+1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x = -1$ (Không thỏa mãn).

Trường hợp: $\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow x+2\sqrt{x}+1 = 3\sqrt{x} \Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1 = 0$ (Vô nghiệm).

Trường hợp: $\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = 6 \Leftrightarrow x+2\sqrt{x}+1 = 6\sqrt{x} \Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+1 = 0 \Leftrightarrow x = 7 \pm 4\sqrt{3}$ (Thỏa mãn).

– Vậy P nguyên khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

Câu 2 (1,0 điểm)

Hai đội công nhân dệt may cần sản xuất một số lượng khẩu trang theo đơn đặt hàng. Nếu làm chung thì sau 4 giờ họ sẽ làm xong. Nhưng hai đội mới làm chung được 3 giờ thì đội I nghỉ, đội II tiếp tục làm trong 3 giờ nữa mới xong. Hỏi mỗi đội nếu làm một mình thì phải bao lâu mới xong công việc?

Lời giải:

- Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian hoàn thành công việc khi làm riêng của đội I và đội II. Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Suy ra mỗi giờ đội I và đội II làm được $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ (công việc).

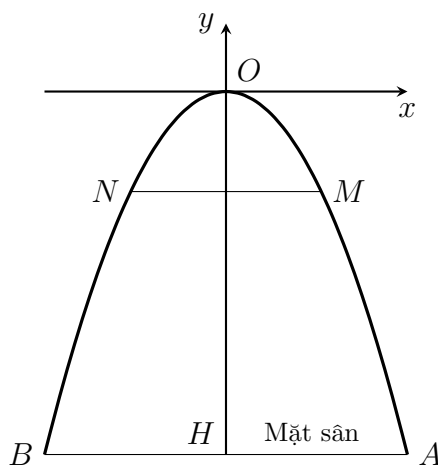
- Vì cả 2 đội làm chung trong 4 giờ thì xong công việc nên ta có phương trình: (1) : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$.
- Sau 3 giờ làm chung thì đội I nghỉ, nhưng để hoàn thành công việc đội II tiếp tục làm trong 3 giờ nữa thì mới hoàn thành công việc nên ta có phương trình: (2) : $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 1$.
- Từ các phương trình (1), (2) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases}$$

- Vậy nếu đội I và đội II làm một mình thì mất lần lượt 6 và 12 giờ để hoàn thành công việc.

Câu 3 (1,0 điểm)

- Cho phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = 3x_1x_2^2 + x_1 + x_2(3x_1^2 + 1)$.
- Ở một hội chợ thương mại, người ta dựng trên mặt sàn một cái cổng có dạng parabol $y = ax^2$ (Hình 1). Biết cổng có chiều cao $OH = 6$ m và khoảng cách giữa hai chân cổng $AB = 4$ m. Người ta treo trên cổng một dây đèn trang trí $MN = 2$ m song song với AB . Tính giá trị của a và khoảng cách từ dây đèn đến mặt sàn.



Hình 1

Lời giải:

- Vì phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 nên theo hệ thức Vi-ét ta được: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -3 \end{cases}$.
 - Xét biểu thức A ta được: $A = 3x_1x_2^2 + x_1 + 3x_1^2x_2 + x_2 = 3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1 + x_2 = 3 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 = -8$
-

- Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Xét hệ trục tọa độ Oxy trên hình vẽ, ta thấy Oy là trục đối xứng của công nên A, B nằm cách đều về 2 phía so với Oy . Vậy nên x_A, x_B thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x_A > 0 > x_B \\ |x_A| = |x_B| \\ |x_A| + |x_B| = AB = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A > 0 > x_B \\ |x_A| = |x_B| = AB : 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2 \\ x_B = -2 \end{cases}$$

Vì A, B là 2 chân công cùng nằm trên mặt đất cách đỉnh công 6m mà xét trên hệ trục tọa độ Oxy thì A, B nằm dưới Ox nên y_A, y_B thỏa mãn:

$$\begin{cases} y_A = y_B < 0 \\ |y_A| = |y_B| = OH = 6 \end{cases} \Rightarrow y_A = y_B = -6$$

Vậy $A(2; -6), B(-2; -6)$.

- Vì đồ thị của hàm số $y = ax^2$ đi qua $A(3, -6)$ nên $-6 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$.
- Gọi $N(x_N; y_N); M(x_M; y_M)$. Vị trí của M, N nằm dưới Ox và cách đều về 2 phía của Oy nên x_N, x_M thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_M > 0 > x_N \\ |x_M| + |x_N| = MN = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ x_N = -1 \end{cases}$$

Vì M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{-3}{2}x^2$ nên ta được $y_M = \frac{-3}{2} \cdot 1^2 = \frac{-3}{2}$.

- Gọi khoảng cách từ dây đèn đến mặt sàn là h m nên ta được:

$$OH = h + |y_M| \Leftrightarrow h = OH - |y_M| = 6 - \left| \frac{-3}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

Vậy khoảng cách từ dây đèn đến mặt sàn là: 4,5 mét.

Câu 4 (1,0 điểm)

Một hộp chứa 8 thẻ được đánh số từ 1 đến 8. Rút ngẫu nhiên lần lượt hai thẻ từ hộp không hoàn lại. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

1. A : “Tổng hai số ghi trên hai thẻ là một số chia hết cho 10”.
2. B : “Tích hai số ghi trên hai thẻ lớn hơn ba lần tổng của chúng đúng 1 đơn vị”.

Lời giải:

- Đếm số phần tử của không gian mẫu: Thẻ thứ nhất có 8 cách chọn và thẻ thứ hai còn 7 cách chọn (do rút liên tiếp và không hoàn lại). Vì vậy có 56 cách rút 2 tấm thẻ từ 8 chiếc thẻ. Do đó số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 56$.
- Các kết quả thuận lợi kí hiệu là: $(a; b)$ với a là số ghi trên tấm thẻ thứ nhất rút được và b là số ghi trên tấm thẻ thứ hai rút được.

1.

- Các kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $(a; b) \in \{(2; 8), (8; 2), (3; 7), (7; 3), (4; 6), (6; 4)\}$ suy ra $n(A) = 6$.

- Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$.

2.

- Các kết quả thuận lợi cho biến cố là: $a \cdot b - 3(a + b) = 1 \Leftrightarrow a \cdot b - 1 = 3(a + b)$.
Các trường hợp $(a; b)$ thoả $a \cdot b - 1$ là một số chia hết cho 3 là:

$$S = (1; 7), (7; 1), (1; 4), (4; 1), (2; 5), (5; 2), (2; 8), (8; 2), (5; 8), (8; 5).$$

- Xét $(a; b) \in S$ thoả điều kiện $a \cdot b - 3(a + b) = 1$.
Ta có:

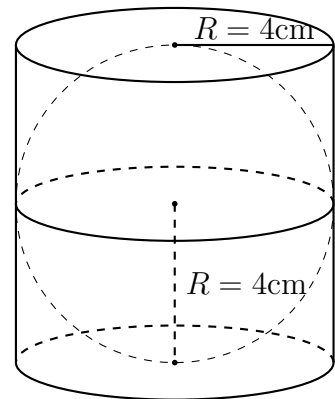
- $\oplus (1; 7), (7; 1)$ không thoả mãn điều kiện.
- $\oplus (1; 4), (4; 1)$ không thoả mãn điều kiện.
- $\oplus (2; 5), (5; 2)$ không thoả mãn điều kiện.
- $\oplus (2; 8), (8; 2)$ không thoả mãn điều kiện.
- $\oplus (5; 8), (8; 5)$ thoả mãn điều kiện.

Suy ra $n(B) = 2$.

- Vậy xác suất của biến cố B là: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$.

Câu 5 (4,0 điểm)

1. Một cơ sở sản xuất nền thơm thiết kế một mẫu quà tặng cao cấp. Mỗi bộ sản phẩm gồm một hộp nhựa hình trụ trong suốt và một viên nền thơm có dạng hình cầu được đặt vừa khít bên trong hình trụ sao cho nằm vừa khít, tiếp xúc với mặt đáy và mặt xung quanh của hộp (Hình 2). Viên nền này có bán kính $R = 4\text{ cm}$.



Hình 2

- a) Tính thể tích của hộp nhựa hình trụ và thể tích của viên nền hình cầu. (Lấy $\pi = 3,14$ và theo đơn vị cm^3 , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
 - b) Để cố định viên nền và trang trí, cơ sở sản xuất đó đổ đầy phần không gian trống giữa viên nền và hộp nhựa bằng các hạt sếp màu li ti. Biết mỗi 100 cm^3 hạt sếp màu có giá là 15 000 đồng. Tính chi phí tiền mua hạt sếp màu để sản xuất 500 bộ quà tặng như trên. (Đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
2. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Kẻ đường kính CD vuông góc với AB . Lấy M thuộc cung nhỏ BC và AM cắt CD tại E . Qua D kẻ tiếp tuyến với (O) cắt đường thẳng BM tại N . Gọi P là hình chiếu vuông góc của B lên DN .
- a) Chứng minh các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.
 - b) Chứng minh $EN \parallel CB$ và $AM \cdot BN = 2R^2$.
 - c) Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

1.

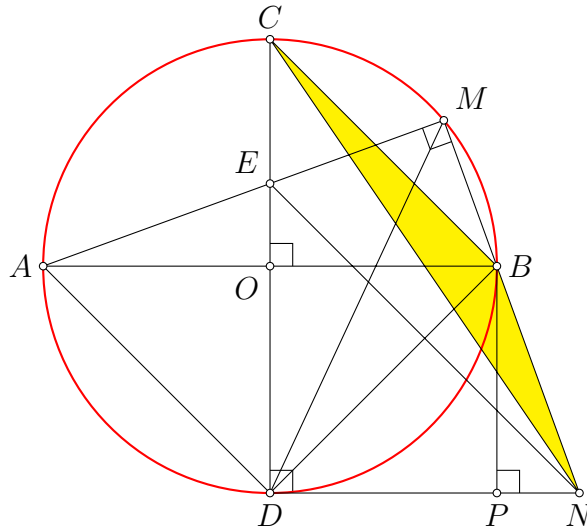
a)

- Vì viên nén hình cầu có bán kính $R = 4\text{cm}$ tiếp xúc với 2 mặt đáy của hộp nhựa hình trụ nên chiều cao h của hộp nhựa là: $h = 2R = 8\text{cm}$. Suy ra thể tích của hộp nhựa hình trụ là: $V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi = 3,14 \cdot 128 \approx 401,92\text{cm}^3$.
- Thể tích của viên nén hình cầu là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256\pi}{3} = \frac{256 \cdot 3,14}{3} \approx 267,95\text{cm}^3$.

b)

- Thể tích hạt sấp màu cần dùng cho 1 sản phẩm là: $V = V_1 - V_2 = 128\pi - \frac{256\pi}{3} = \frac{128\pi}{3}\text{cm}^3$.
- Ta có: $100\text{cm}^3 = 15\,000$ đồng thì $1\text{cm}^3 = 150$ đồng. Suy ra chi phí tiền mua hạt sấp màu để làm 500 sản phẩm là: $500 \cdot 150 \cdot V = 10053096,49$ (đồng) = 10,05 (triệu đồng).

2.



a)

- Vì $\widehat{EMN} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\triangle MEN$ vuông tại M do đó 3 điểm M, E, N cùng thuộc đường tròn đường kính NE .
- Vì $\widehat{EDN} = 90^\circ$ (Tính chất tiếp tuyến) nên $\triangle DEN$ vuông tại D do đó 3 điểm D, E, N cùng thuộc đường tròn đường kính NE .
- Suy ra 4 điểm M, N, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính NE .

b)

- Vì 4 điểm M, N, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính NE suy ra tứ giác $MNDE$ nội tiếp do đó $\widehat{DEN} = \widehat{DMN}$ (cùng chắn $\widehat{DN}$) mà $\widehat{BCD} = \widehat{DMB}$ (cùng chắn $\widehat{DB}$) suy ra $\widehat{DEN} = \widehat{BCD}$. Vậy nên $NE \parallel BC$ (Cặp góc đồng vị).
- Ta có: $\widehat{BNP} = \widehat{AEO}$ (cùng bù $\widehat{MED}$) mà $\widehat{ABM} = \widehat{AEO}$ (cùng phụ $\widehat{MAB}$) suy ra $\widehat{BNP} = \widehat{ABM}$, lại có $\widehat{BPN} = \widehat{AMB}$ suy ra $\triangle BPN \sim \triangle AMB \Rightarrow \frac{AM}{BP} = \frac{AB}{BN} \Leftrightarrow AM \cdot BN = BP \cdot AB$.
- Nhận thấy tứ giác $OBPD$ là hình chữ nhật có $OB = OD$ suy ra $OBPD$ là hình vuông dẫn đến $OB = OD = DP = BP = R$. Suy ra $AM \cdot BN = R \cdot 2R = 2R^2$.

c)

– Gọi:

⊕ S_{CDNB} là diện tích tứ giác $CDNB$.

⊕ S_{CBD} là diện tích $\triangle CBD$.

⊕ S_{DBN} là diện tích $\triangle DBN$.

⊕ S_{CBN} là diện tích $\triangle CBN$.

⊕ S_{DCN} là diện tích $\triangle DCN$.

– Ta luôn có: $S_{CDNB} = S_{CBD} + S_{DBN} = S_{CBN} + S_{DCN} \Leftrightarrow S_{CBN} = S_{CBD} + S_{DBN} - S_{DCN}$.

– Ta có:

$$\oplus S_{CBD} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2R = R^2.$$

$$\oplus S_{DBN} = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot ND = \frac{1}{2} \cdot R \cdot (R + PN) = \frac{R^2}{2} + \frac{R \cdot PN}{2}.$$

$$\oplus S_{DCN} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot ND = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot (R + PN) = R \cdot (R + PN) = R^2 + R \cdot PN.$$

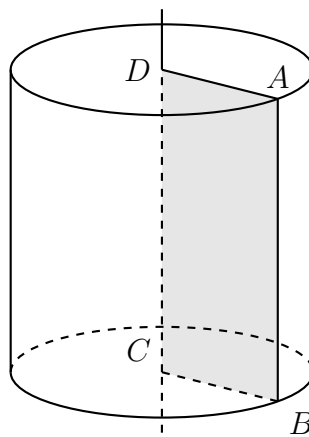
$$\Rightarrow S_{CBN} = R^2 + \frac{R^2}{2} + \frac{R \cdot PN}{2} - R^2 - R \cdot PN = \frac{R^2}{2} - \frac{R \cdot PN}{2}.$$

⊕ Vì R luôn không đổi nên S_{CBN} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $PN = 0 \Leftrightarrow P \equiv N$ hay $M \equiv B$ thì S_{CBN} đạt giá trị lớn nhất.

– Kết luận, S_{CBN} đạt giá trị lớn nhất là $\frac{R^2}{2}$ khi và chỉ khi $M \equiv B$.

Câu 6 (1,0 điểm)

- Một người thợ mộc tiện khối gỗ thành một hình trụ. Cắt hình trụ đó bởi một mặt phẳng chứa trục, ta được mặt cắt là một hình chữ nhật. Xét hình chữ nhật $ABCD$ được tạo bởi trục và một đường sinh của hình trụ (Hình 3). Biết chu vi của hình chữ nhật $ABCD$ bằng 12 cm. Hỏi thể tích lớn nhất của khối gỗ hình trụ này có thể đạt được là bao nhiêu?



Hình 3

- Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên. Chứng minh $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương.

Lời giải:

1.

- Gọi x (cm) là chiều rộng của hình chữ nhật $ABCD$ hay chính là bán kính đáy của hình trụ. Điều kiện: $0 < x < 6$.
 $\Rightarrow 6 - x$ (cm) là chiều dài của hình chữ nhật $ABCD$ hay chính là chiều cao của hình trụ.
- Ta có thể tích của hình trụ là:

$$V = \pi \cdot x^2 \cdot (6 - x) = \frac{\pi \cdot x \cdot x \cdot (12 - 2x)}{2} \stackrel{Cauchy}{\leq} \pi \cdot \frac{\left(\frac{x + x + 12 - 2x}{3}\right)^3}{2} = 32\pi$$

- Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x = 12 - 2x \Leftrightarrow x = 4$.
- Vậy thể tích lớn nhất của khối gỗ hình trụ này đạt được là $32\pi\text{cm}^3$ khi $AD = BC = 4, CD = AB = 2$.

2.

- Vì $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên nên $\sqrt{12n^2 + 1} = m$ với $m \in \mathbb{Z}^+$.
Do đó ta được phương trình: $12n^2 + 1 = m^2$ mà nhận thấy $12n^2 + 1$ là số lẻ nên m phải là một số lẻ. Đặt $m = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ ta được: $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1} = 2 + 2m = 2 + 2(2k + 1) = 4(k + 1)$.
- Ta có: $12n^2 + 1 = m^2 \Leftrightarrow 12n^2 = (2k + 1)^2 - 1 = 2k(2k + 2) = 4k(k + 1) \Leftrightarrow 3n^2 = k(k + 1)$.
Vì k và $k + 1$ là 2 số nguyên liên tiếp do đó $\gcd(k; k + 1) = 1$. Từ đây, giả sử $k + 1 = 3x^2, k = y^2$ với x, y là các số nguyên. Ta lập được hệ:
$$\begin{cases} k + 1 = 3x^2 \\ k = y^2 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = y^2.$$

Xét thấy y^2 chia 3 dư 0 hoặc dư 1 mà $3x^2 - 1$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow$ Mâu thuẫn, dấu " $=$ " không thể xảy ra.
- Do đó $k + 1$ là một số chính phương. Suy ra $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương.

HẾT