

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

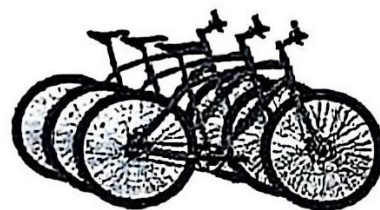
Câu I (1,5 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+4}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu II (2,0 điểm).

1. Một cửa hàng nhập về 120 chiếc xe đạp. Cửa hàng treo giá bán mỗi chiếc xe đạp tăng 30% so với giá lúc nhập về. Sau khi bán được 20 chiếc xe đạp, cửa hàng treo giá bán mới giảm 20% so với giá đã bán trước đó và với giá bán mới này thì 100 chiếc xe đạp còn lại đã được bán hết. Biết các chiếc xe đạp có giá nhập về bằng nhau và số tiền lãi của cửa hàng thu được sau khi bán hết 120 chiếc xe đạp là 50 triệu đồng. Hỏi giá nhập về của mỗi chiếc xe đạp là bao nhiêu triệu đồng?



2. Cho phương trình $x^2 - mx + m - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1^2 + x_2^2 + mx_2 - 8 = 0$.

Câu III (3,5 điểm).

1. Từ một tấm gỗ hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1 mét, bạn Toàn làm một cái bàn bằng cách xác định các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $MA = NB = PC = QD$ rồi cắt tấm gỗ theo các đường thẳng MN, NP, PQ, QM . Sau khi cắt, sản phẩm tạo ra là 1 mặt bàn có dạng hình tứ giác $MNPQ$ và 4 chân bàn có dạng là 4 hình tam giác AMQ, BNM, CPN, DQP . Tính độ dài



đoạn thẳng MN biết diện tích tứ giác $MNPQ$ bằng $\frac{5}{9}$ lần diện tích hình vuông $ABCD$.

2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB \leq AC$ và AE là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ ($E \in BC$). Các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H ($M \in BC, N \in CA, P \in AB$). Biết AO cắt BC tại F và AH cắt PN tại K . Chứng minh:

a) PH là tia phân giác của $\widehat{MPN}$.

b) $\triangle AKP$ đồng dạng với $\triangle AFC$.

c) $EF \cdot EB \leq EM \cdot EC$.

Câu IV (1,5 điểm). Xếp ngẫu nhiên 5 bạn An, Bình, Tâm, Nhiên, Phúc ngồi trên một hàng ghế dài có 5 chỗ ngồi. Tính xác suất của biến cố D : "An ngồi cạnh Bình nhưng An không ngồi cạnh Nhiên".

Câu V (1,5 điểm).

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + xy - 2y + 3 = 0$.

2. Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $(m-n)(2m+2n-1) = m^2$.

Chứng minh $m-n$ là số chính phương.

.....HẾT.....

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Lời giải đề toán chuyên lớp 10/2026

Lê Quý Đôn - Quảng Trị

Trương Hữu An - Hồ Tuấn Phát - Hồ Sỹ Duy Hiếu (top 8 TST) - Trương Gia Bình - Nguyễn Thiện Nhân
Thái Văn Tuấn - Nguyễn Minh Quân - Nguyễn Đức Anh Tuấn - Nguyễn Văn Việt
Nguyễn Thiện Minh - Nguyễn Võ Phúc Nguyên - Nguyễn Hoàng Hà - Nguyễn Gia Hưng

§1. Đề Thi

Bài 1: Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+4}$$

với $x \geq 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 2:

- Một cửa hàng nhập về 120 chiếc xe đạp. Cửa hàng treo giá bán mỗi chiếc xe đạp tăng 30% so với giá lúc nhập về. Sau khi bán được 20 chiếc xe đạp, cửa hàng treo giá bán mới giảm 20% so với giá đã bán trước đó và với giá bán mới này thì 100 chiếc xe đạp còn lại đã được bán hết. Biết các chiếc xe đạp có giá nhập về bằng nhau và số tiền lãi của cửa hàng thu được sau khi bán hết 120 chiếc xe đạp là 50 triệu đồng. Hỏi giá nhập về của mỗi chiếc xe đạp là bao nhiêu triệu đồng?

- Cho phương trình

$$x^2 - mx + m - 3 = 0$$

với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$2x_1^2 + x_2^2 + mx_2 - 8 = 0.$$

🔗 Bài 3:

- a) Từ một tấm gỗ hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1 mét, bạn Toàn làm một cái bàn bằng cách xác định các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $MA = NB = PC = QD$ rồi cắt tấm gỗ theo các đường thẳng MN, NP, PQ, QM . Sau khi cắt, sản phẩm tạo ra là 1 mặt bàn có dạng hình tứ giác $MNPQ$ và 4 chân bàn có dạng là 4 hình tam giác AMQ, BNM, CPN, DQP . Tính độ dài đoạn thẳng MN biết diện tích tứ giác $MNPQ$ bằng $\frac{5}{9}$ lần diện tích hình vuông $ABCD$.
- b) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB \leq AC$ và AE là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ ($E \in BC$). Các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H ($M \in BC, N \in CA, P \in AB$). Biết AO cắt BC tại F và AH cắt PN tại K . Chứng minh:
- 1) PH là tia phân giác của $\widehat{MPN}$.
 - 2) $\triangle AKP$ đồng dạng với $\triangle AFC$.
 - 3) $EF \cdot EB \leq EM \cdot EC$.

🔗 Bài 4:

Xếp ngẫu nhiên 5 bạn An, Bình, Tâm, Nhiên, Phúc ngồi trên một hàng ghế dài có 5 chỗ ngồi. Tính xác suất của biến cố D : “An ngồi cạnh Bình nhưng An không ngồi cạnh Nhiên”.

🔗 Bài 5:

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$x^2 + xy - 2y + 3 = 0.$$

- b) Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn

$$(m - n)(2m + 2n - 1) = m^2.$$

Chứng minh $m - n$ là số chính phương.

§2. Lời giải

Bài 1: Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+4}$$

với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

 **Lời giải.**

a) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+4} \\ &= \left[(x+\sqrt{x}+1) - (x-\sqrt{x}+1) \right] \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+4} \\ &= 2\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+4} \\ &= \frac{2x}{x+4}, \forall x \geq 0, x \neq 1 \end{aligned}$$

Vậy

$$P = \frac{2x}{x+4}$$

■

b) Từ **câu a)** ta có:

$$P = \frac{2x}{x+4} = 2 - \frac{8}{x+4}$$

Do đó để $P \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{8}{x+4} \in \mathbb{Z}$, hay $x+4|8$ và $x \geq 0$. Vậy $x \in \{0; 4\}$ thì P nguyên.

■

Bài 2:

- a) Một cửa hàng nhập về 120 chiếc xe đạp. Cửa hàng treo giá bán mỗi chiếc xe đạp tăng 30% so với giá lúc nhập về. Sau khi bán được 20 chiếc xe đạp, cửa hàng treo giá bán mới giảm 20% so với giá đã bán trước đó và với giá bán mới này thì 100 chiếc xe đạp còn lại đã được bán hết. Biết các chiếc xe đạp có giá nhập về bằng nhau và số tiền lãi của cửa hàng thu được sau khi bán hết 120 chiếc xe đạp là 50 triệu đồng. Hỏi giá nhập về của mỗi chiếc xe đạp là bao nhiêu triệu đồng?

- b) Cho phương trình

$$x^2 - mx + m - 3 = 0$$

với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$2x_1^2 + x_2^2 + mx_2 - 8 = 0.$$

Lời giải.

- a) Gọi giá nhập về của mỗi chiếc xe đạp là x (triệu đồng).

Khi treo giá bán lần đầu, mỗi chiếc xe đạp được bán với giá:

$$x + 30\%x = 1,3x$$

Do đó, số tiền thu được khi bán 20 chiếc xe đạp đầu tiên là:

$$20 \cdot 1,3x = 26x$$

Sau đó cửa hàng giảm 20% so với giá bán trước đó, nên giá bán mới của mỗi chiếc xe đạp là:

$$1,3x(1 - 20\%) = 1,3x \cdot 0,8 = 1,04x$$

Vì 100 chiếc xe đạp còn lại được bán hết với giá này nên số tiền thu được là:

$$100 \cdot 1,04x = 104x$$

Vậy tổng doanh thu của cửa hàng là:

$$26x + 104x = 130x$$

.

Tổng số tiền vốn để nhập 120 chiếc xe đạp là $120x$

Theo đề bài, tiền lãi thu được là 50 triệu đồng, nên

$$130x - 120x = 50 \Rightarrow x = 5$$

Vậy giá nhập về của mỗi chiếc xe đạp là 5 triệu đồng.



b) Giả sử tồn tại $m \in \mathbb{R}$ thoả mãn yêu cầu đề bài, khi đó theo **định lý Vieta** ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 3 \end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + x_2^2 + mx_2 - 8 &= 2x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + m - 3 - 8 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + m - 11 \\ &= 2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + m - 11 \\ &= 2(m^2 - 2m + 6) + m - 11 \\ &= 2m^2 - 3m + 1 \end{aligned}$$

Do đó $m \in \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$ thì $2x_1^2 + x_2^2 + mx_2 - 8 = 0$.

Thử lại thấy phương trình $x^2 - mx + m - 3$ có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $m \in \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

■

Nhận xét. Ta có:

$$\Delta = m^2 - 4m + 12 = (m - 2)^2 + 8 > 0$$

Nên phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 3:

- a) Từ một tấm gỗ hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1 mét, bạn Toàn làm một cái bàn bằng cách xác định các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $MA = NB = PC = QD$ rồi cắt tấm gỗ theo các đường thẳng MN, NP, PQ, QM . Sau khi cắt, sản phẩm tạo ra là 1 mặt bàn có dạng hình tứ giác $MNPQ$ và 4 chân bàn có dạng là 4 hình tam giác AMQ, BNM, CPN, DQP . Tính độ dài đoạn thẳng MN biết diện tích tứ giác $MNPQ$ bằng $\frac{5}{9}$ lần diện tích hình vuông $ABCD$.
- b) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB \leq AC$ và AE là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ ($E \in BC$). Các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H ($M \in BC, N \in CA, P \in AB$). Biết AO cắt BC tại F và AH cắt PN tại K . Chứng minh:
- 1) PH là tia phân giác của $\widehat{MPN}$.
 - 2) $\triangle AKP \sim \triangle AFC$.
 - 3) $EF \cdot EB \leq EM \cdot EC$.

Lời giải.

- a) Đặt $MA = NB = PC = QD = t$, ta có:

$$S_{MNPQ} = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2}t(1-t) = 1 - 2t(1-t).$$

Mà $1 - 2t(1-t) = \frac{5}{9}$ nên $9t^2 - 9t + 2 = 0$ suy ra $t = \frac{1}{3}$ hoặc $t = \frac{2}{3}$.

Do đó:

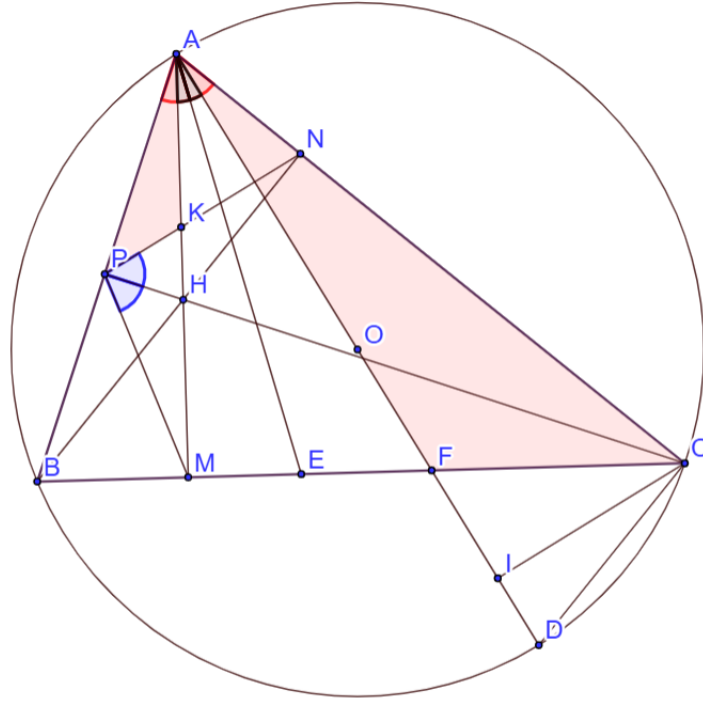
$$MN = \sqrt{(1-t)^2 + t^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Vậy

$$MN = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ m}$$

■

b)



1) Dễ dàng chứng minh các tứ giác $BCNP$, $BMHP$ là các tứ giác nội tiếp

Khi đó $\widehat{HPM} = \widehat{HBM} = \widehat{NBC} = \widehat{NPH}$ do đó PH là tia phân giác của $\widehat{MPN}$.

2) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) . Ta có $\widehat{KAP} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ADC} = \widehat{FAC}$

Mặt khác do tứ giác $BCNP$ nội tiếp nên $\widehat{APN} = \widehat{ACB}$ hay $\widehat{APK} = \widehat{ACF}$

nên từ đây ta chứng minh được $\triangle AKP \sim \triangle AFC$.

3) Vì AE là tia phân giác $\widehat{BAC}$ nên $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$

Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{CAF}$ và $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ nên ta được $\widehat{MAE} = \widehat{FAE}$ hay AE là tia phân giác của $\widehat{MAF}$

Từ đây ta có được tỉ số $\frac{EM}{EF} = \frac{AM}{AF}$

Gọi I là hình chiếu của C lên AD .

Bài toán cần chứng minh tương đương $\frac{EB}{EC} \leq \frac{EM}{EF}$ cũng tương đương cần chứng minh $\frac{AB}{AC} \leq \frac{AM}{AF}$

Ta dễ dàng chứng minh được $\triangle ABM \sim \triangle ADC$ suy ra $\frac{AB}{AD} = \frac{AM}{AC}$ hay $AM = \frac{AB \cdot AC}{AD}$.

Khi đó ta cần chứng minh $\frac{AB}{AC} \leq \frac{AD}{AF}$ hay cần chứng minh $AF \cdot AD \leq AC^2$.

Mà $AI \cdot AD = AC^2$ do đó ta cần chứng minh $AF \leq AI$.

Ta có $AB \leq AC$ Nên $\widehat{ACB} \leq \widehat{ABC}$ hay $\widehat{ACF} \leq \widehat{ADC} = \widehat{ACI}$. Suy ra $AF \leq AI$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AB = AC$.

■

Bài 4:

Xếp ngẫu nhiên 5 bạn An, Bình, Tâm, Nhiên, Phúc ngồi trên một hàng ghế dài có 5 chỗ ngồi. Tính xác suất của biến cố D : “An ngồi cạnh Bình nhưng An không ngồi cạnh Nhiên”.

Lời giải.

Gọi không gian mẫu là cách xếp cả 5 bạn vào một hàng ghế:

$$n(\Omega) = 5! = 120$$

Ta đếm số cách thoả mãn biến cố D : “An ngồi cạnh Bình nhưng An không ngồi cạnh Nhiên”

Cách 1:

Xét vị trí của An:

• An ngồi đầu hàng hoặc cuối hàng:

Có 2 cách chọn ghế của An trong trường hợp này, khi đó Bình ngồi cạnh An thì tự động Nhiên không ngồi cạnh An.

Do đó số cách xếp trong trường hợp này là $2 \cdot 3! = 12$

• An ngồi ở ghế giữa (ghế 2,3,4):

Bình ngồi một trong 2 ghế cạnh An nên có 2 cách.

Nhiên không ngồi một trong 2 ghế có cạnh An nên có 2 cách.

Hai bạn còn lại xếp vào 2 ghế còn lại: $2! = 2$ cách.

Vậy trường hợp này có $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ cách.

Vậy số cách thuận lợi là $24 + 12 = 36$. Do đó:

$$P(D) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

□

Cách 2:

Số cách An ngồi cạnh Bình là $4! \cdot 2! = 48$.

Số cách An ngồi cạnh Bình và ngồi cạnh Nhiên là $3! \cdot 2! = 12$ (vì An phải ngồi giữa Bình và Nhiên).

Do đó số cách thuận lợi là $48 - 12 = 36$. Do đó:

$$P(D) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

□

Bài 5:

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn

$$x^2 + xy - 2y + 3 = 0.$$

b) Cho m, n là các số nguyên dương thoả mãn

$$(m - n)(2m + 2n - 1) = m^2.$$

Chứng minh $m - n$ là số chính phương.

LỜI GIẢI.

a) Nếu $x = 2$ suy ra $7 = 0$ (vô lý). Do đó $x \neq 2$, phương trình đã cho tương đương:

$$y = -\frac{x^2 + 3}{x - 2} = -(x + 2) - \frac{7}{x - 2}$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta suy ra $\frac{7}{x - 2} \in \mathbb{Z}$ hay $x - 2 | 7$, do đó $x \in \{3; 1; 9; -5\}$.

Thử lại thấy các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn yêu cầu đề bài là:

$$(1, 4), (3, -12), (9, -12), (-5, 4)$$

■

b) **Cách 1:**

Hiển nhiên $m > n > 0$ khi đó đặt $d = m - n > 0$ ta có:

$$d(2m + 2n - 1) = m^2 \tag{1}$$

Ta chứng minh $g = \gcd(d, 2m + 2n - 1) = 1$, thật vậy:

$$\begin{cases} g | d \cdot (m + n) = m^2 - n^2 \\ g | d(2m + 2n - 1) = m^2 \\ g | 2m + 2n - 1 - 2d = 4n - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g | n^2 \\ g | 4n - 1 \end{cases}$$

Mặt khác nếu $c | g$ và $c | n$ thì từ điều trên ta có $c | 4n - 1$ nên $c | 1$, hay $\gcd(g, n) = 1$.

Mà $g | n^2$ nên ta suy ra $g = 1$ hay $\gcd(d, 2m + 2n - 1) = 1$.

Từ đây kết hợp (1) suy ra d cũng là số chính phương hay ta có đpcm.

■

Cách 2:

Hiển nhiên $m > n > 0$ khi đó đặt $d = m - n > 0$ ta có:

$$d(4n + 2d - 1) = n^2 + 2nd + d^2 \Rightarrow n^2 - 2nd - d^2 + d = 0$$

Suy ra $\Delta'_n = d^2 - (d - d^2) = 2d^2 - d$. Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $\Delta'_n = d(2d - 1)$ là số chính phương

Mà $\gcd(d, 2d - 1) = 1$ nên ta suy ra d là số chính phương hay ta có đpcm.

■