

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

(Đề thi có 02 trang)

Ngày thi: 01/6/2026

Môn thi: TOÁN (Hệ chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút

**Bài 1. (1,5 điểm)**

1. Một cái túi chứa 5 quả bóng giống nhau được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 (mỗi quả bóng được đánh một số khác nhau). Bốc ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng từ túi (mỗi lần bốc một quả, quả bóng bốc lần đầu không được hoàn lại). Tính xác suất của biến cố A: “Hai số ghi trên hai quả bóng bốc được đều là số chẵn”.

2. Tìm tất cả các số nguyên tố  $p, q, r$  sao cho  $p < q < r$  và  $pq + 25, pr + 100$  là những số chính phương.

**Bài 2. (2,0 điểm)**

1. Cho hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2$  có đồ thị  $(P)$ . Gọi  $A, B$  là các điểm thuộc  $(P)$  có hoành độ lần lượt là  $-2$  và  $4$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên trục tung sao cho  $MA + MB$  nhỏ nhất.

2. Cho  $a, b$  là hai số thực không âm và  $c$  là số thực dương thỏa mãn đẳng thức  $\frac{3c - 2b}{\sqrt{a} + \sqrt{a + 2b - 3c}} = \sqrt{2b} + \sqrt{3c}$ . Tính giá trị của biểu thức  $M = \frac{5b + 4a + 8bc - 2038c}{a - 2b + 2023c}$ .

**Bài 3. (2,0 điểm)**

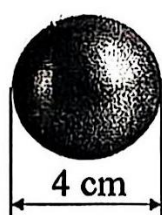
1. Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + 3 = 2\sqrt{(3y - x)(y + 1)} \\ 4xy - 2x - 2y - 1 = \sqrt{10y + 1} \end{cases}$$

2. Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ca} + \frac{1}{c + ab} \geq \frac{7}{1 + abc}.$$

**Bài 4. (3,5 điểm)**

1. Một cốc thủy tinh dạng hình trụ được đặt thẳng đứng. Phía bên trong cốc có đường kính đáy bằng 8 cm và diện tích xung quanh bằng  $96\pi \text{ cm}^2$ .



a) Tính thể tích phần bên trong của cốc.

b) Một lượng nước được rót vào cốc sao cho độ cao của cột nước bằng  $\frac{3}{4}$  chiều cao thành bên trong cốc. Tính độ cao của cột nước trong cốc sau khi thả nhẹ một viên bi sắt dạng hình cầu, đường kính bằng 4 cm vào trong cốc nước.

2. Cho tam giác  $ABC$  nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$  và  $D, E, F$  lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh  $A, B, C$ .

a) Chứng minh  $H$  là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác  $DEF$ .

b) Đường thẳng  $AO$  lần lượt cắt  $EF, BC$  và đường tròn  $(O)$  tại  $K, L, M$  ( $M$  khác  $A$ ). Tiếp tuyến tại  $M$  của  $(O)$  cắt đường thẳng  $AD$  tại  $N$ . Chứng minh  $NL \parallel HK$ .

c) Đường thẳng  $AD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $T$  (khác  $A$ ). Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AFT$  cắt đường thẳng  $BC$  tại hai điểm  $P, Q$ . Chứng minh  $CP = CQ$ .

**Bài 5. (1,0 điểm)** Viết tất cả các hợp số không vượt quá 30 lên bảng.

a) Có thể tô mỗi số trên bảng bởi một trong hai màu xanh, đỏ (cả hai màu đều được dùng) sao cho tích các số cùng màu bằng nhau được không? Tại sao?

b) Có thể xóa đi 3 số trên bảng và tô mỗi số còn lại bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng (cả ba màu đều được dùng) sao cho tích các số cùng màu bằng nhau được không? Tại sao?

\_\_\_\_\_HẾT\_\_\_\_\_

## CHUYÊN TOÁN QUẢNG NGÃI - 2026

**Bài tập 1** (Lim Olympic - Quảng Ngãi - Bài 1)

- ① Một cái túi chứa 5 quả bóng giống nhau được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 (mỗi quả bóng được đánh một số khác nhau). Bốc ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng từ túi (mỗi lần bốc một quả, quả bóng bốc lần đầu không được hoàn lại). Tính xác suất của biến cố A: “Hai số ghi trên hai quả bóng bốc được đều là số chẵn”.
- ② Tìm tất cả các số nguyên tố  $p, q, r$  sao cho  $p < q < r$  và  $pq + 25, pr + 100$  là những số chính phương.

 **Lời giải.**

- ① Số cách bốc ra 2 quả từ 5 quả là  $5.4 = 20$  cách.

Ngoài ra để hai số bốc được đều là số chẵn thì phải bốc đúng 2 và 4 hoặc 4 và 2 là 2 cách.

Do đó xác suất cần tính bằng  $\frac{1}{10}$ .

- ② Giả sử  $pq + 25 = x^2$  và  $pr + 100 = y^2$  với  $x, y$  nguyên dương.

Khi đó  $pq = (x - 5)(x + 5)$ .

Vì  $p < q$  và  $x - 5 < x + 5$  nên hoặc  $x - 5 = 1$  hoặc  $x - 5 = p$ .

Nếu  $x - 5 = 1$  thì  $x = 6$ , từ đó  $pq = 11$ , vô lý.

Do đó  $x - 5 = p$ ,  $x + 5 = q$  hay  $q - p = 10$ .

Tương tự từ  $pr + 100 = y^2$  ta có  $pr = (y - 10)(y + 10)$ .

Nếu  $y - 10 = 1$  thì  $y = 11$  nên  $pr = 21$  hay  $p = 3, r = 7$ .

Khi đó  $q = 13$ , vô lý do  $p < q < r$ .

Vì vậy  $y - 10 = p$  và  $y + 10 = r$ , do đó  $r - p = 20$ .

◇ Nếu  $p = 2$  thì  $q = 22$ , không thoả mãn.

◇ Nếu  $p = 3$  thì  $q = 13, r = 23$ , thoả mãn.

◇ Nếu  $p > 3$ :

☆  $p \equiv 1 \pmod{3}$  thì  $r \equiv 0 \pmod{3}$  và  $r > 3$ , vô lý.

☆ Nếu  $p \equiv 2 \pmod{3}$  thì  $q \equiv 0 \pmod{3}$  và  $q > 3$ , vô lý.

Vậy  $p = 3, q = 13, r = 23$ .

## Bài tập 2 (Lim Olympic - Quảng Ngãi - Bài 2)

- Cho hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2$  có đồ thị  $(P)$ . Gọi  $A, B$  là các điểm thuộc  $(P)$  có hoành độ lần lượt là  $-2$  và  $4$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên trục tung sao cho  $MA + MB$  nhỏ nhất.
- Cho  $a, b$  là hai số thực không âm và  $c$  là số thực dương thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{3c - 2b}{\sqrt{a} + \sqrt{a + 2b - 3c}} = \sqrt{2b} + \sqrt{3c}$$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } M = \frac{5b + 4a + 8bc - 2038c}{a - 2b + 2023c}.$$

### Lời giải.

- Ta có  $A(-2, 2)$  và  $B(4, 8)$ .

Điểm  $M$  thuộc trục tung  $Oy$  nên  $M(0, y_M)$ .

Để ý hoành độ  $A, B$  trái dấu nhau nên  $A$  và  $B$  nằm về hai phía khác nhau với trục tung  $Oy$ , do đó

$$MA + MB \geq AB$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $A, M, B$  thẳng hàng theo thứ tự đó.

Để ý phương trình đường thẳng  $AB$ :  $y = x + 4$  nên giao điểm  $M$  của  $AB$  với trục tung  $Oy$  là  $y_M = 4$  hay  $M(0, 4)$ .

Khi đó  $M(0, 4)$  là điểm duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

- Đặt  $x = \sqrt{a}$ ,  $y = \sqrt{2b}$  và  $z = \sqrt{3c}$  thì  $a = x^2$ ,  $2b = y^2$ ,  $3c = z^2$ .

$$\text{Ta có } a + 2b - 3c = x^2 + y^2 - z^2 \text{ nên } \frac{z^2 - y^2}{x + \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}} = y + z.$$

$$\text{Vì } y + z > 0 \text{ nên } z - y = x + \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}.$$

$$\text{Suy ra } (z - x - y)^2 = x^2 + y^2 - z^2 \text{ hay } (z - x)(z - y) = 0.$$

$$\text{Nếu } z = y \text{ thì dẫn tới } x + \sqrt{x^2 + y^2 - z^2} = 0, \text{ vô lý.}$$

$$\text{Do đó } z = x, \text{ từ đó } y = 0.$$

$$\text{Suy ra } a = 3c \text{ và } b = 0, \text{ thay vào } M = -1.$$

## Bài tập 3 (Lim Olympic - Quảng Ngãi - Bài 3)

- Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3 = 2\sqrt{(3y - x)(y + 1)} \\ 4xy - 2x - 2y - 1 = \sqrt{10y + 1} \end{cases}$$

- Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ca} + \frac{1}{c + ab} \geq \frac{7}{1 + abc}$$

 **Lời giải.**

- ① Điều kiện xác định:  $(3y - x)(y + 1) \geq 0$  và  $10y + 1 \geq 0$ .

Từ phương trình đầu tiên, bình phương có  $(x + 3)^2 = 4(3y - x)(y + 1)$  (và  $x \geq -3$ ).

Hay  $x^2 + (4y + 10)x - (12y^2 + 12y - 9) = 0$ .

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn  $x$ , tham số  $y$  thì

$$\Delta'_x = (2y + 5)^2 + (12y^2 + 12y - 9) = 16y^2 + 32y + 16 = 16(y + 1)^2$$

Từ đó giải ra  $x = -(2y + 5) + 4(y + 1) = 2y - 1$  hoặc  $x = -(2y + 5) - 4(y + 1) = -6y - 9$ .

Nếu  $x = -6y - 9 \geq -3$  thì  $y \leq -1$ , tuy nhiên  $y \geq -\frac{1}{10}$  từ điều kiện xác định nên vô lý.

Do đó  $x = 2y - 1$ , thay vào phương trình còn lại có được:

$$4(2y - 1)y - 2(2y - 1) - 2y - 1 = \sqrt{10y + 1}$$

Tương đương  $8y^2 - 10y + 1 = \sqrt{10y + 1}$ .

Bình phương hai vế ta được  $64y^2 - 160y^3 + 116y^2 - 20y + 1 = 10y + 1$ .

Tương đương  $2y(2y - 3)(16y^2 - 16y + 5) = 0$ .

Vì thế  $y = 0$  hoặc  $y = \frac{3}{2}$ , thử lại thoả mãn.

Tương ứng ta suy ra tất cả bộ nghiệm  $(x, y)$  là  $(-1, 0)$  và  $(2, \frac{3}{2})$ .

- ② Điều phải chứng minh tương đương với

$$\sum \frac{1 + abc}{a + bc} \geq 7 \iff \sum \frac{(a + 1)(bc + 1)}{(a + b)(a + c)} \geq 10$$

Tuy nhiên bất đẳng thức này luôn đúng do:

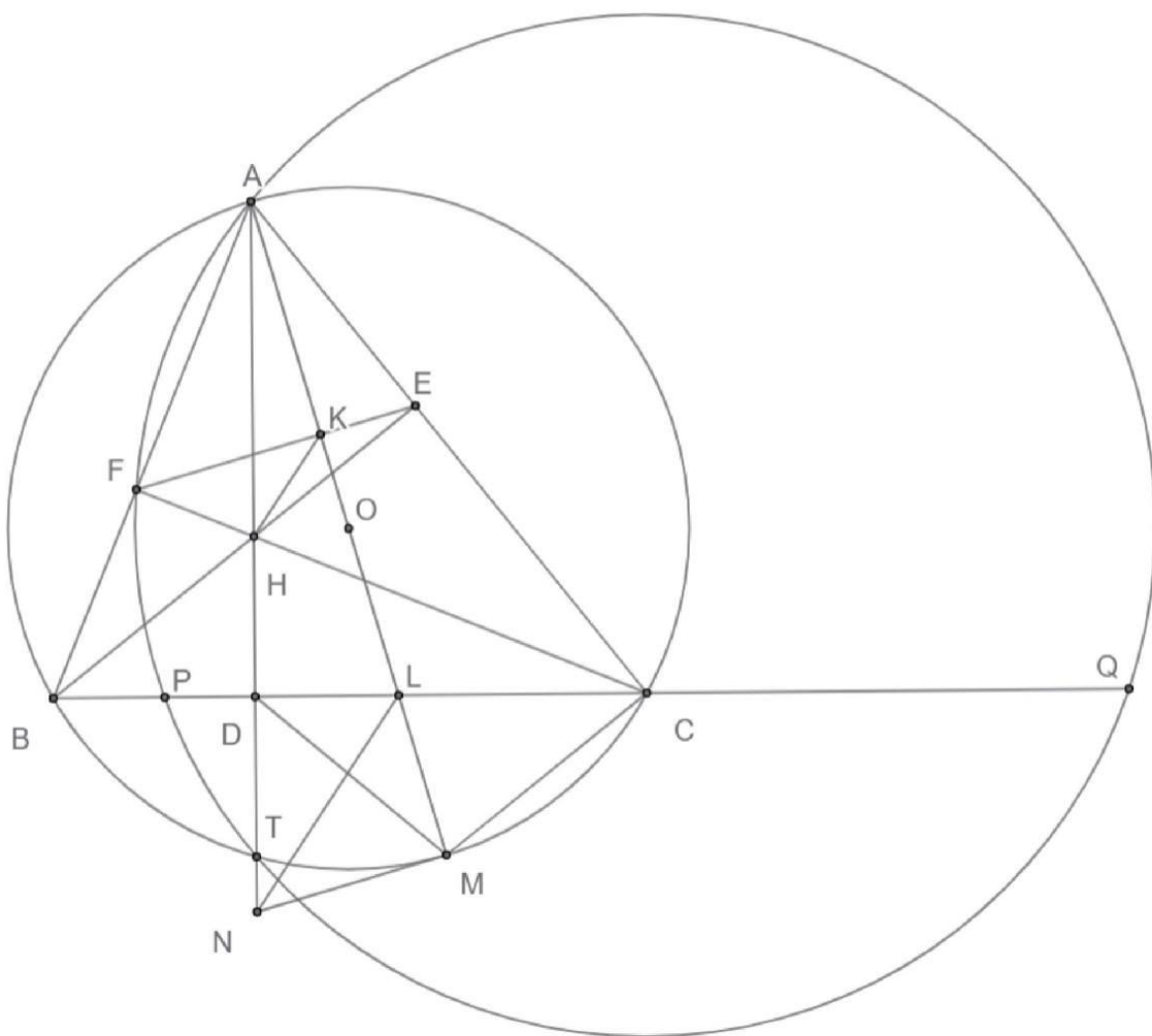
$$\begin{aligned} \sum \frac{(a + 1)(bc + 1)}{(a + b)(a + c)} &= \sum \frac{(a + b + a + c)(bc + 1)}{(a + b)(a + c)} \\ &= \sum \left( \frac{bc + 1}{a + c} + \frac{bc + 1}{a + b} \right) \\ &= \sum \left( \frac{bc + 1}{a + c} + \frac{ba + 1}{a + c} \right) \\ &= \sum b + 2 \sum \frac{1}{a + c} \\ &= 1 + 2 \sum \frac{1}{1 - b} \\ &\geq 1 + 2 \cdot \frac{9}{3 - (a + b + c)} = 10 \end{aligned}$$

## Bài tập 4 (Lim Olympic - Quảng Ngãi - Bài 4)

- ① Một cốc thủy tinh dạng hình trụ được đặt thẳng đứng. Phía bên trong cốc có đường kính đáy bằng 8 cm và diện tích xung quanh bằng  $96\pi \text{ cm}^2$ .
  - a) Tính thể tích phần bên trong của cốc.
  - b) Một lượng nước được rót vào cốc sao cho độ cao của cột nước bằng  $\frac{3}{4}$  chiều cao thành bên trong cốc. Tính độ cao của cột nước trong cốc sau khi thả nhẹ một viên bi sắt dạng hình cầu, đường kính bằng 4 cm vào trong cốc nước.
- ② Cho tam giác  $ABC$  nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$  và  $D, E, F$  lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh  $A, B, C$ .
  - a) Chứng minh  $H$  là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác  $DEF$ .
  - b) Đường thẳng  $AO$  lần lượt cắt  $EF, BC$  và đường tròn  $(O)$  tại  $K, L, M$  ( $M$  khác  $A$ ). Tiếp tuyến tại  $M$  của  $(O)$  cắt đường thẳng  $AD$  tại  $N$ . Chứng minh  $NL \parallel HK$ .
  - c) Đường thẳng  $AD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $T$  (khác  $A$ ). Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AFT$  cắt đường thẳng  $BC$  tại hai điểm  $P, Q$ . Chứng minh  $CP = CQ$ .

### Lời giải.

- ①
  - a) Ta có  $r = 4$  và  $S_{xq} = 2\pi rh = 96\pi$  nên  $h = 12$ , từ đó  $V = \pi r^2 h = 192\pi \text{ (cm}^3\text{)}$ .
  - b) Ban đầu độ cao của nước là  $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9 \text{ (cm)}$ .  
 Vì bán kính bi:  $R = 2$  nên  $V_{bi} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3}$ .  
 Thể tích nước cộng với viên bi sẽ bằng  $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 9 + \frac{32}{3}\pi = \frac{464}{3}\pi$ .  
 Do đó độ cao của cột nước sau khi thả bi là  $\frac{V}{\pi r^2} = \frac{29}{3} \text{ (cm)}$



- 2 a) Để ý  $\widehat{BDF} = \widehat{BAC} = \widehat{CDE}$  nên  $DA$  là phân giác góc  $\widehat{FDE}$ .  
Tương tự suy ra  $H$  là tâm nội tam giác  $DEF$ .
- b) Để ý  $KECM$  nội tiếp nên  $AK.AM = AE.AC = AH.AD$ .  
Từ đó  $\widehat{AHK} = \widehat{AMD}$ .  
Để ý tứ giác  $DLMN$  nội tiếp nên  $\widehat{LMD} = \widehat{LND}$ .  
Do đó  $\widehat{AHK} = \widehat{ANL}$  hay  $HK$  song song  $NL$ .
- c) Ta có  $BP.BQ = BF.BA = BD.BC$ .  
Do đó  $(BD - DP)(BD + DQ) = BD(BD + DC)$ .  
Hay  $BD(DQ - DP) - DP.DQ = DB.DC$ .  
Mà  $DP.DQ = DA.DT = DB.DC$  nên  $BD(DQ - DP) = 2DB.DC$ .  
Hay  $DQ - DP = 2DC$  hay  $DQ - DC = DP + DC$  hay  $CQ = CP$ .

## Bài tập 5 (Lim Olympic - Quảng Ngãi - Bài 5)

Viết tất cả các hợp số không vượt quá 30 lên bảng.

- ① Có thể tô mỗi số trên bảng bởi một trong hai màu xanh, đỏ (cả hai màu đều được dùng) sao cho tích các số cùng màu bằng nhau được không? Tại sao?
- ② Có thể xóa đi 3 số trên bảng và tô mỗi số còn lại bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng (cả ba màu đều được dùng) sao cho tích các số cùng màu bằng nhau được không? Tại sao?

### Lời giải.

Ta có  $S = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30\}$ .

- ① Giả sử tô được hai màu xanh, đỏ sao cho tích các số màu xanh bằng tích các số màu đỏ. Khi đó tích của tất cả các số trên bảng phải là một số chính phương. Tuy nhiên tích các số này bằng  $2^{25}3^{13}5^67^311^113^1$  không là số chính phương nên không thể.

- ② Ta xóa ba số 12, 22, 26 thì các số còn lại là:

4, 6, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30

◇ Tô màu xanh: 6, 9, 10, 14, 15, 16.

◇ Tô màu đỏ: 8, 18, 21, 24, 25.

◇ Tô màu vàng: 4, 20, 27, 28, 30.

Để ý cách tô này thoả mãn do tích mỗi nhóm đều bằng  $2^73^45^27$  nên câu trả lời là có thể.