

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1) = 2, P(2) = 3, P(3) = 4, P(4) = 17$. Tính giá trị $P(0)$.

c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x-1}$.

Câu 2 (1,5 điểm). Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

a) Chứng minh rằng m là số chẵn.

b) Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = 1$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3a+4b+2c} + \frac{1}{3b+4c+2a} + \frac{1}{3c+4a+2b}$.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi EM, FN là hai đường cao của tam giác DEF . Gọi I' là điểm đối xứng của I qua EF .

a) Chứng minh rằng MN song song BC và I' là trực tâm của tam giác AEF .

b) Chứng minh rằng $\widehat{DFI'} = \widehat{MEC}$ và $\widehat{I'MC} = 90^\circ$.

c) Gọi S là giao điểm của $I'C$ với DE , T là giao điểm của ID với MC . Chứng minh rằng 5 điểm I', M, N, S, T cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5 (1,0 điểm). Ban đầu trên bảng có 100 số 1. Mỗi bước bạn An chọn một số a bất kỳ trên bảng sau đó xóa nó đi và thay thế bởi bốn số $\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}$. Chẳng hạn, nếu chọn số 1 thì An sẽ thay thế bởi bốn số

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}.$$

a) Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước, trên bảng không có 77 số giống nhau.

b) Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho bất kể bạn An chọn số như thế nào thì sau mỗi bước, trên bảng luôn tồn tại ít nhất k số giống nhau.

_____ **HẾT** _____

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1)=2, P(2)=3, P(3)=4, P(4)=17$. Tính giá trị $P(0)$.

c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x-1}$.

Câu 2 (1,5 điểm). Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

a) Chứng minh rằng m là số chẵn.

b) Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3$.

a) Chứng minh rằng $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3 + b^3}{(1+c)^3} + \frac{b^3 + c^3}{(1+a)^3} + \frac{c^3 + a^3}{(1+b)^3}.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BH, CH .

a) Chứng minh rằng $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ và MN song song với EF .

b) Đường tròn tâm O đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng M, N, P, Q thẳng hàng.

c) Đường tròn đường kính DC cắt OC tại S (khác C), DS cắt AC tại T . Chứng minh $AC \cdot TQ = AT \cdot QC$.

Câu 5 (1,0 điểm). Ban đầu trên bảng viết cặp số có thứ tự $(2;3)$. Mỗi bước bạn Phú được phép thay thế cặp $(x; y)$ trên bảng bằng một trong các cặp $(y; x), (-x; y), (y - x; y)$.

a) Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước bạn Phú viết được cặp $(4;1)$ lên bảng.

b) Hỏi sau hữu hạn bước bạn Phú có viết được cặp $(2026; 2027)$ lên bảng hay không?

**LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
PHÚ THỌ
NĂM HỌC 2026 – 2027**



Môn Toán

Môn thi: Toán (vòng 2, dành cho chuyên Toán)

Nguyễn Nhất Huy - Lê Nam Khánh - Phạm Ngọc Uy

**Trần Nguyễn Đức Nhật - Lê Thanh Lâm - Hoàng Lê
Nhật Tùng**

**Phan Anh Quân - Trịnh Huy Vũ - Nguyễn Đăng
Khoa - Nguyễn Đức Quán**

1. PHẦN ĐỀ THI

Câu 1.

- a) Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?
- b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1) = 2, P(2) = 3, P(3) = 4, P(4) = 17$. Tính giá trị $P(0)$.
- c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x - 1}$.

Câu 2. Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

- a) Chứng minh rằng m là số chẵn.
- b) Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Câu 3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

- a) Chứng minh rằng $\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = 1$.
- b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3a+4b+2c} + \frac{1}{3b+4c+2a} + \frac{1}{3c+4a+2b}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi EM, FN là hai đường cao của tam giác DEF . Gọi I' là điểm đối xứng của I qua EF .

- a) Chứng minh rằng MN song song BC và I' là trực tâm của tam giác AEF .

b) Chứng minh rằng $\widehat{DFI'} = \widehat{MEC}$ và $\widehat{I'MC} = 90^\circ$.

c) Gọi S là giao điểm của $I'C$ với DE , T là giao điểm của ID với MC . Chứng minh rằng 5 điểm I', M, N, S, T cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5. Ban đầu trên bảng có 100 số 1. Mỗi bước bạn An chọn một số a bất kỳ trên bảng sau đó xóa nó đi và thay thế bởi bốn số $\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}$. Chẳng hạn, nếu chọn số 1 thì An sẽ thay thế bởi bốn số $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

a) Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước, trên bảng không có 77 số giống nhau.

b) Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho bất kể bạn An chọn số như thế nào thì sau mỗi bước, trên bảng luôn tồn tại ít nhất k số giống nhau.



Tích Kiến Thức - Trữ Niềm Vui

2. PHẦN ĐÁP ÁN

Câu 1

- a) Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?
- b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1) = 2, P(2) = 3, P(3) = 4, P(4) = 17$. Tính giá trị $P(0)$.
- c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x-1}$.

Lời giải.

- a) Gọi x là số nhân viên lễ tân ban đầu của khách sạn ($x \in \mathbb{N}^*$).

Tổng thời gian trực mỗi ngày là 24 giờ nên thời gian trực ban đầu của mỗi nhân viên là: $\frac{24}{x}$ (giờ).

Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên, tổng số nhân viên là $x + 1$ (người) nên thời gian trực của mỗi nhân viên sau khi có người mới là $\frac{24}{x+1}$ (giờ).

Vì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm đi 48 phút $= \frac{4}{5}$ giờ, ta có phương trình

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+1} = \frac{4}{5}$$

Phương trình tương đương với $\frac{24}{x(x+1)} = \frac{4}{5}$ hay $(x-5)(x+6) = 0$

Từ đó phương trình có hai nghiệm $x = 5$ (TMĐK) và $x = -6$ (không TMĐK)

Vậy ban đầu khách sạn có 5 nhân viên lễ tân.

- b) Đặt $Q(x) = P(x) - (x+1)$. Khi đó $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$ nên $x = 1, x = 2$ và $x = 3$ là ba nghiệm của đa thức bậc 3 $Q(x)$.

Do $P(x)$ bậc 3 nên $Q(x)$ cũng bậc 3, từ đó

$$Q(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$$

với a là hệ số cao nhất của $P(x)$

Ta có $Q(4) = 6a = 12$ nên $a = 2$. Từ đó tính được $Q(0) = -12$ nên $P(0) = -11$.

- c) ĐKXD: $x \neq 1$.

Đặt $t = x - 1$. Phương trình trở thành

$$\sqrt{t^2 + 15} = t + \frac{3}{t}$$

tương đương

$$\begin{cases} t + \frac{3}{t} \geq 0 \\ t^2 + 15 = \left(t + \frac{3}{t}\right)^2 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} t + \frac{3}{t} \geq 0 \\ t^2 = 1 \end{cases}$$

tương đương $t = 1$, từ đó $x = 2$ thỏa mãn ĐXKĐ

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{2\}$.

□

Câu 2

Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

- Chứng minh rằng m là số chẵn.
- Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Lời giải.

- Giả sử phản chứng m lẻ, phương trình đã cho trở thành

$$p^m - 1 = (p - 1)(p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1) = 5 \cdot 2^n,$$

mà m lẻ và p lẻ nên $p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1$ lẻ, suy ra $p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1 = \{1; 5\}$. Mặt khác $p \geq 3, m \geq 3$ nên

$$p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1 \geq 3^2 + 3 + 1 = 13 \text{ (mâu thuẫn)}.$$

Suy ra điều giả sử là sai. Vậy m là số chẵn.

- Vì m chẵn nên ta đặt $m = 2k$ với k nguyên dương. Khi đó, ta có

$$(p^k - 1)(p^k + 1) = 5 \cdot 2^n.$$

Lúc này, vì $\gcd(p^k - 1, p^k + 1) \mid p^k + 1 - (p^k - 1) = 2$ và p lẻ nên $p^k + 1, p^k - 1$ chẵn ta suy ra $\gcd(p^k - 1, p^k + 1) = 2$. Do đó $p^k - 1$ và $p^k + 1$ không đồng thời chia hết cho 4.

Từ đây, kết hợp với $p^k - 1 < p^k + 1$ ta có các trường hợp sau

- Nếu $p^k - 1 = 5 \cdot 2, p^k + 1 = 2^{n-1}$ thì $p = 11, k = 1$ nhưng không có giá trị n thỏa mãn.
- Nếu $p^k - 1 = 2^{n-1}, p^k + 1 = 5 \cdot 2$ thì ta được $p = 3, k = 2$ và suy ra $n = 4, m = 4$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
- Nếu $p^k + 1 = 5 \cdot 2^{n-1}, p^k - 1 = 2$ thì $p = 3, k = 1$ nhưng không có giá trị n thỏa mãn.

Vậy tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn là $(4, 4, 3)$.

□

Câu 3

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = 1$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3a+4b+2c} + \frac{1}{3b+4c+2a} + \frac{1}{3c+4a+2b}$.

Lời giải.

a) Với $abc = 1$ ta có

$$\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = \frac{1}{ab+b+1} + \frac{ab}{ab+b+1} + \frac{b}{ab+b+1} = \frac{1+ab+b}{ab+b+1} = 1.$$

b) $\frac{1}{3a+4b+2c} = \frac{1}{(a+b+c) + (2a+3b+c)} \leq \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{a+b+c} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2a+3b+c}.$

Tương tự với các phân thức còn lại, ta được

$$P \leq \frac{1}{3(a+b+c)} + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{1}{2a+3b+c} + \frac{1}{2b+3c+a} + \frac{1}{2c+3a+b} \right).$$

Đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ với x, y, z là các số thực dương có tích là 1.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \frac{1}{2a+3b+c} &= \frac{1}{2x^2+3y^2+z^2} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2) + x^2+2y^2} \leq \frac{1}{3+x^2+2y^2} \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2) + (y^2+1) + 2} \leq \frac{1}{2(xy+y+1)}. \end{aligned}$$

Tương tự các phân thức còn lại, suy ra

$$\frac{1}{2a+3b+c} + \frac{1}{2b+3c+a} + \frac{1}{2c+3a+b} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{xy+y+1} + \frac{1}{yz+z+1} + \frac{1}{zx+x+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Cuối cùng lưu ý rằng $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$,

$$\text{Như vậy } P \leq \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{3}$.

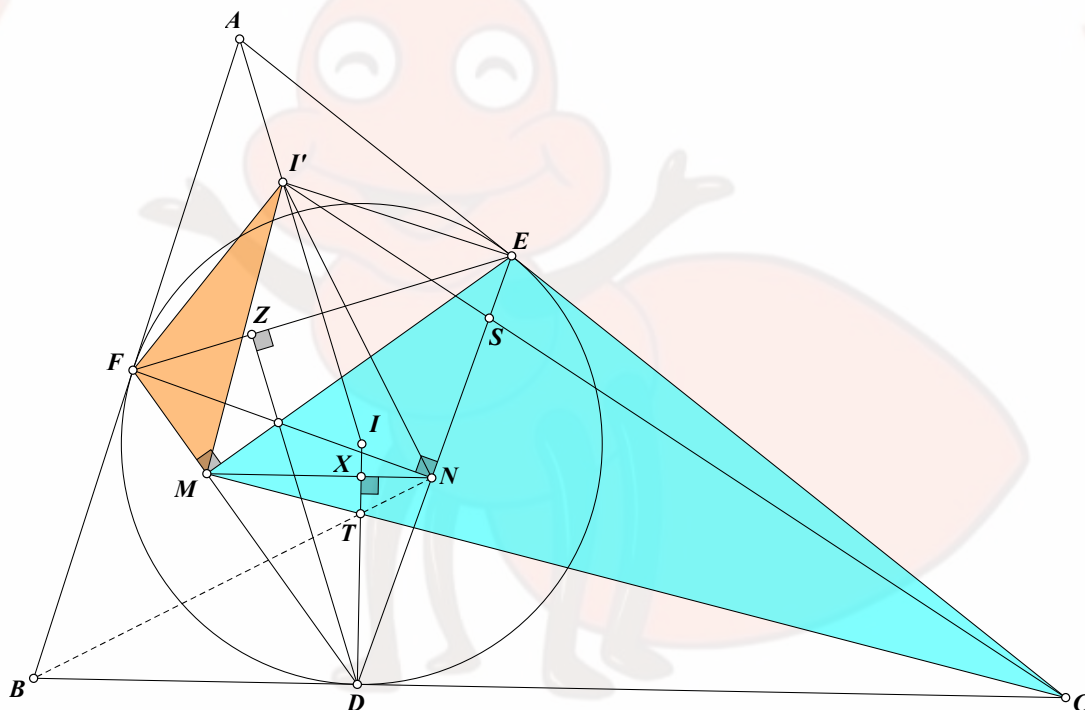
□

Câu 4

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi EM, FN là hai đường cao của tam giác DEF . Gọi I' là điểm đối xứng của I qua EF .

- Chứng minh rằng MN song song BC và I' là trực tâm của tam giác AEF .
- Chứng minh rằng $\widehat{DFI'} = \widehat{MEC}$ và $I'MC = 90^\circ$.
- Gọi S là giao điểm của $I'C$ với DE , T là giao điểm của ID với MC . Chứng minh rằng 5 điểm I', M, N, S, T cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



- Ta có $FMEN$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{DMN} = \widehat{FED} = \widehat{BDF}$ nên $MN \parallel BC$.

Lại có I' đối xứng với I qua EF , nên $II' \perp EF$, mà $AI \perp EF$ nên A, I', I thẳng hàng. Mặt khác II' đi qua trung điểm EF nên $FI'EI$ là hình thoi, suy ra $FI' \parallel IE$ do đó $FI' \perp AE$, từ đó ta có I' là trực tâm của tam giác AEF .

b) Ta có $I'E = I'F$ nên $\widehat{I'EF} = \widehat{I'FE}$ và $AF = AE$ nên $\widehat{AFI'} = \widehat{AEI'}$, ta biến đổi góc

$$\begin{aligned}\widehat{AFI'} + \widehat{BFD} &= \widehat{AEI'} + \widehat{FED} = \widehat{AEI'} + \widehat{FEM} + \widehat{MED} \\ &= \widehat{AEI'} + \widehat{FEM} + 90^\circ - \widehat{EDF} \\ &= \widehat{AEI'} + \widehat{FEM} + 90^\circ - \widehat{AFE} \\ &= \widehat{AEI'} + \widehat{FEM} + \widehat{I'EF} = \widehat{AEM}\end{aligned}$$

nên $\widehat{DFI'} = \widehat{MEC}$. Lại có $\widehat{EMF} = \widehat{IEC}$ và $\widehat{EFM} = \frac{\widehat{EID}}{2} = \widehat{EIC}$ nên $\triangle EMF \sim \triangle CEI$ (g.g)

nên $\frac{CE}{ME} = \frac{IE}{MF} = \frac{I'F}{MF}$, suy ra $\triangle I'FM \sim \triangle CEM$ (c.g.c), suy ra $\triangle FME \sim \triangle I'MC$ (c.g.c)

nên $\widehat{FME} = \widehat{I'MC} = 90^\circ$.

c) Ta có nhận xét sau:

Nhận xét — Ta có $\triangle DMN \sim \triangle DEF$ và ID là đường cao của DMN nên ta kẻ thêm đường cao của tam giác DEF để sử dụng tam giác đồng dạng tương ứng, ngoài ra cũng tận dụng được bổ đề khi kẻ đường thẳng qua D vuông góc với EF .

Kẻ ID giao MN tại X , $DZ \perp EF$. Khi đó ta có $\triangle DMN \sim \triangle DEF$ có DX, DZ là các đường cao tương ứng nên $\frac{XN}{XM} = \frac{FZ}{ZE}$, lại có $DZ \perp EF$ nên ZD là phân giác của góc BZC , suy ra $\frac{BD}{DC} = \frac{BZ}{ZC} = \frac{FZ}{ZE} = \frac{XN}{XM}$, áp dụng chùm đường thẳng đồng quy suy ra MC, NB, ID đồng quy tại T hay B, T, N thẳng hàng.

Tương tự câu b suy ra $\widehat{I'NT} = \widehat{I'MT} = 90^\circ$ nên $I'MTN$ là tứ giác nội tiếp. Lại có

$$\widehat{MI'S} = 90^\circ - \widehat{I'CM} = 90^\circ - \widehat{FEM} = \widehat{MFE} = \widehat{DNM},$$

nên $MI'SN$ là tứ giác nội tiếp. Vậy I', M, N, S, T cùng nằm trên một đường tròn.

□

Câu 5

Ban đầu trên bảng có 100 số 1. Mỗi bước bạn An chọn một số a bất kỳ trên bảng sau đó xóa nó đi và thay thế bởi bốn số $\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}$. Chẳng hạn, nếu chọn số 1 thì An sẽ thay thế bởi bốn số $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

- Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước, trên bảng không có 77 số giống nhau.
- Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho bất kể bạn An chọn số như thế nào thì sau mỗi bước, trên bảng luôn tồn tại ít nhất k số giống nhau.

Lời giải. Các số thu được sau các thao tác có dạng $\frac{1}{4^n}$. Giả sử ở một thời điểm t trên bảng có c_n số bằng $\frac{1}{4^n}$. Lưu ý là sau mỗi thao tác thì tổng các số trên bảng không đổi nên ta luôn có

$$100 = \sum c_n \frac{1}{4^n}.$$

a) Ở mỗi bước chọn ra một số 1 rồi biến thành bốn số $\frac{1}{4}$. Sau 24 bước thu được 96 số $\frac{1}{4}$. Như vậy sau 24 bước này trên bảng có 76 số 1 và 96 số $\frac{1}{4}$.

Tiếp tục ở mỗi bước chọn số $\frac{1}{4}$ và biến thành bốn số $\frac{1}{16}$. Sau 20 bước thực hiện với các số $\frac{1}{4}$ thu được 80 số $\frac{1}{16}$. Lúc này trên bảng có 76 số 1; 76 số $\frac{1}{4}$ và 80 số $\frac{1}{16}$.

Cuối cùng mỗi bước chọn số $\frac{1}{16}$ và biến thành bốn số $\frac{1}{64}$. Sau 4 bước thì thu được 16 số $\frac{1}{64}$. Lúc này trên bảng có 76 số 1; 76 số $\frac{1}{4}$; 76 số $\frac{1}{16}$ và 16 số $\frac{1}{64}$.

b) Ta chứng minh k lớn nhất bằng 76. Thật vậy, giả sử ở thời điểm t nào đó trên bảng có $m+1$ số. Nếu mọi $c_n \leq 75$ thì

$$100 = \sum c_n \cdot \frac{1}{4^n} \leq 75 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^m} \right).$$

Đặt

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^m}$$

$$3S = 4S - S = 4 - \frac{1}{4^m} < 4$$

nên

$$S < \frac{4}{3}.$$

Suy ra

$$100 < 75 \cdot \frac{4}{3} = 100,$$

mâu thuẫn. Vậy tồn tại i để $c_i \geq 76$. Suy ra $k \geq 76$. Theo trên thì tồn tại một cách thực hiện các thao tác để $k < 77$. Như vậy tóm lại $k_{\max} = 76$.

□

Tích Kiến Thức - Trữ Niềm Vui

**LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
PHÚ THỌ
NĂM HỌC 2026 – 2027**



Môn Toán

Môn thi: Toán (vòng 2, dành cho chuyên Tin)

Nguyễn Nhật Huy - Lê Nam Khánh - Phạm Ngọc Uy

Trần Nguyễn Đức Nhật - Lê Thanh Lâm - Hoàng Lê Nhật Tùng

Phan Anh Quân - Trịnh Huy Vũ - Nguyễn Đăng Khoa - Nguyễn Đức Quán

1. PHẦN ĐỀ THI

Câu 1.

- a) Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?
- b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1) = 2, P(2) = 3, P(3) = 4, P(4) = 17$. Tính giá trị $P(0)$.
- c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x - 1}$.

Câu 2. Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

- a) Chứng minh rằng m là số chẵn.
- b) Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3$.

- a) Chứng minh rằng $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3 + b^3}{(1 + c)^3} + \frac{b^3 + c^3}{(1 + a)^3} + \frac{c^3 + a^3}{(1 + b)^3}.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BH, CH .

- a) Chứng minh rằng $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ và MN song song với EF .
- b) Đường tròn tâm O đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng M, N, P, Q thẳng hàng.
- c) Đường tròn đường kính DC cắt OC tại S (khác C), DS cắt AC tại T . Chứng minh rằng $AC \cdot TQ = AT \cdot QC$.

Câu 5. Ban đầu trên bảng viết cặp số có thứ tự $(2; 3)$. Mỗi bước bạn Phú được phép thay thế cặp $(x; y)$ trên bảng bằng một trong các cặp $(y; x), (-x; y), (y - x; y)$.

- a) Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước bạn Phú viết được cặp $(4; 1)$ lên bảng.
- b) Hỏi sau hữu hạn bước bạn Phú có viết được cặp $(2026; 2027)$ lên bảng hay không?



Tích Kiến Thức - Trữ Niềm Vui

2. PHẦN ĐÁP ÁN

Câu 1

- a) Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?
- b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1) = 2, P(2) = 3, P(3) = 4, P(4) = 17$. Tính giá trị $P(0)$.
- c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x - 1}$.

Lời giải.

- a) Gọi x là số nhân viên lễ tân ban đầu của khách sạn ($x \in \mathbb{N}^*$).

Tổng thời gian trực mỗi ngày là 24 giờ nên thời gian trực ban đầu của mỗi nhân viên là: $\frac{24}{x}$ (giờ).

Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên, tổng số nhân viên là $x + 1$ (người) nên thời gian trực của mỗi nhân viên sau khi có người mới là $\frac{24}{x+1}$ (giờ).

Vì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm đi 48 phút $= \frac{4}{5}$ giờ, ta có phương trình

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+1} = \frac{4}{5}$$

Phương trình tương đương với $\frac{24}{x(x+1)} = \frac{4}{5}$ hay $(x-5)(x+6) = 0$

Từ đó phương trình có hai nghiệm $x = 5$ (TMĐK) và $x = -6$ (không TMĐK)

Vậy ban đầu khách sạn có 5 nhân viên lễ tân.

- b) Đặt $Q(x) = P(x) - (x+1)$. Khi đó $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$ nên $x = 1, x = 2$ và $x = 3$ là ba nghiệm của đa thức bậc 3 $Q(x)$.

Do $P(x)$ bậc 3 nên $Q(x)$ cũng bậc 3, từ đó

$$Q(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$$

với a là hệ số cao nhất của $P(x)$

Ta có $Q(4) = 6a = 12$ nên $a = 2$. Từ đó tính được $Q(0) = -12$ nên $P(0) = -11$.

- c) ĐKXD: $x \neq 1$.

Đặt $t = x - 1$. Phương trình trở thành

$$\sqrt{t^2 + 15} = t + \frac{3}{t}$$

tương đương

$$\begin{cases} t + \frac{3}{t} \geq 0 \\ t^2 + 15 = \left(t + \frac{3}{t}\right)^2 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} t + \frac{3}{t} \geq 0 \\ t^2 = 1 \end{cases}$$

tương đương $t = 1$, từ đó $x = 2$ thỏa mãn ĐXKĐ

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{2\}$.

□

Câu 2

Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

- Chứng minh rằng m là số chẵn.
- Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Lời giải.

- Giả sử phản chứng m lẻ, phương trình đã cho trở thành

$$p^m - 1 = (p - 1)(p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1) = 5 \cdot 2^n,$$

mà m lẻ và p lẻ nên $p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1$ lẻ, suy ra $p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1 = \{1; 5\}$. Mặt khác $p \geq 3, m \geq 3$ nên

$$p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1 \geq 3^2 + 3 + 1 = 13 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Suy ra điều giả sử là sai. Vậy m là số chẵn.

- Vì m chẵn nên ta đặt $m = 2k$ với k nguyên dương. Khi đó, ta có

$$(p^k - 1)(p^k + 1) = 5 \cdot 2^n.$$

Lúc này, vì $\gcd(p^k - 1, p^k + 1) \mid p^k + 1 - (p^k - 1) = 2$ và p lẻ nên $p^k + 1, p^k - 1$ chẵn ta suy ra $\gcd(p^k - 1, p^k + 1) = 2$. Do đó $p^k - 1$ và $p^k + 1$ không đồng thời chia hết cho 4.

Từ đây, kết hợp với $p^k - 1 < p^k + 1$ ta có các trường hợp sau

- Nếu $p^k - 1 = 5 \cdot 2, p^k + 1 = 2^{n-1}$ thì $p = 11, k = 1$ nhưng không có giá trị n thỏa mãn.
- Nếu $p^k - 1 = 2^{n-1}, p^k + 1 = 5 \cdot 2$ thì ta được $p = 3, k = 2$ và suy ra $n = 4, m = 4$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
- Nếu $p^k + 1 = 5 \cdot 2^{n-1}, p^k - 1 = 2$ thì $p = 3, k = 1$ nhưng không có giá trị n thỏa mãn.

Vậy tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn là $(4, 4, 3)$.

□

Câu 3

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3$.

a) Chứng minh rằng $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3 + b^3}{(1 + c)^3} + \frac{b^3 + c^3}{(1 + a)^3} + \frac{c^3 + a^3}{(1 + b)^3}.$$

Lời giải.

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$4(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a + b)^3 \geq 0$$

$$(a + b)(4(a^2 - ab + b^2) - (a + b)^2) \geq 0$$

$$3(a + b)(a - b)^2 \geq 0,$$

luôn đúng.

b) Theo câu a) thì

$$P \geq \frac{1}{4} \sum \left(\frac{a + b}{1 + c} \right)^3.$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\left(\frac{a + b}{1 + c} \right)^3 + 1 + 1 \geq 3 \frac{a + b}{1 + c}$$

nên

$$P \geq \frac{3}{4} \sum \frac{a + b}{1 + c} - \frac{3}{2}.$$

Lại có

$$\sum \frac{a + b}{1 + c} = \sum \left(\frac{a + b}{1 + c} + 1 \right) - 3 = (a + b + c + 1) \sum \frac{1}{1 + c} - 3 \geq \frac{9(a + b + c + 1)}{a + b + c + 3} - 3.$$

$$\text{Vì } \frac{a + b + c + 1}{a + b + c + 3} = 1 - \frac{2}{a + b + c + 3} \geq 1 - \frac{2}{3 + 3} = \frac{2}{3} \text{ nên}$$

$$P \geq \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

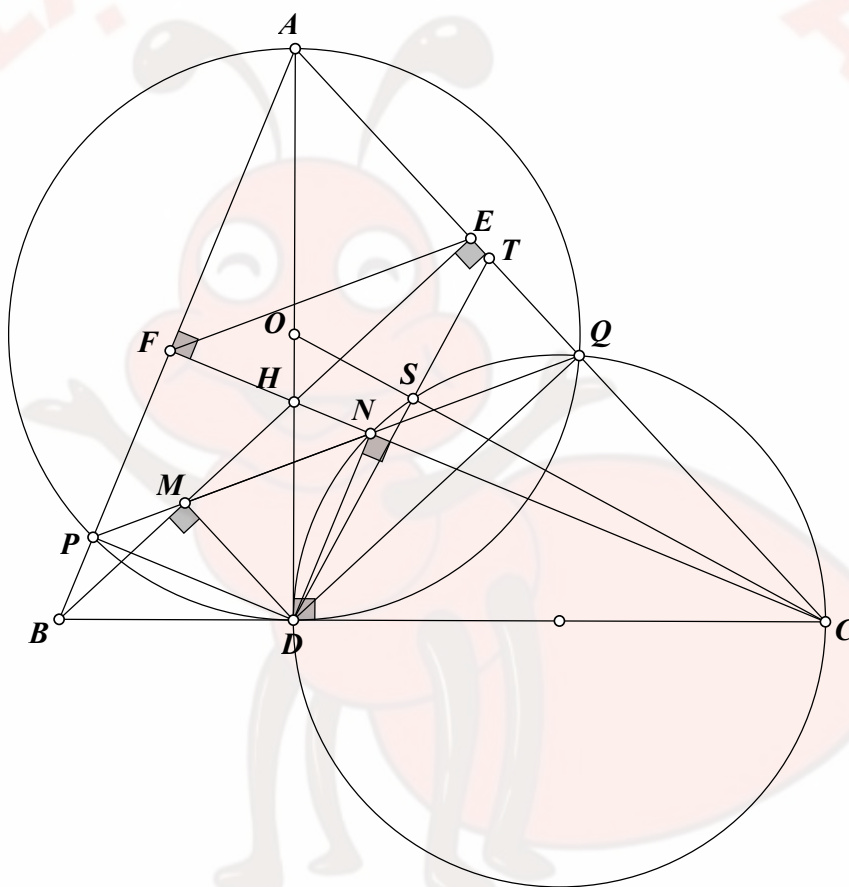
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$.

□

Câu 4

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BH, CH .

- Chứng minh rằng $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ và MN song song với EF .
- Đường tròn tâm O đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng M, N, P, Q thẳng hàng.
- Đường tròn đường kính DC cắt OC tại S (khác C), DS cắt AC tại T . Chứng minh rằng $AC \cdot TQ = AT \cdot QC$.



Lời giải.

- Dễ thấy $BFEC$ là tứ giác nội tiếp nên $AE \cdot AC = AF \cdot AB$. Lại có $DN \parallel AF$, $AE \parallel DM$ và AD, FN, EM đồng quy tại H nên $\frac{FH}{HN} = \frac{AH}{AD} = \frac{EH}{HM}$ nên $EF \parallel MN$.
- Ta trình bày bài toán sau bằng hai cách

Cách 1. Áp dụng đường thẳng Simson cho tứ giác nội tiếp $BFHD$ có $DP \perp BF, DM \perp BH, DN \perp HF$ nên P, M, N thẳng hàng, tương tự ta cũng có M, N, Q thẳng hàng.

Cách 2. Ta có $\frac{BP}{BF} = \frac{BD}{BC} = \frac{BM}{BE}$ nên $PM \parallel EF$, tương tự $NQ \parallel EF$, từ đó P, M, N, Q thẳng hàng.

c) Ta có $\frac{AQ}{QC} = \frac{AD^2}{DC^2}$ và $\frac{OS}{SC} = \frac{OD^2}{DC^2}$. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AOC có D, S, T thẳng hàng nên

$$\frac{SO}{SC} \cdot \frac{TC}{TA} \cdot \frac{DA}{DO} = 1 \Rightarrow \frac{TA}{TC} = 2 \frac{OD^2}{DC^2} = \frac{AD^2}{2DC^2} = \frac{AQ}{2QC},$$

nên $2AT \cdot QC = AQ \cdot TC$. Biến đổi

$$\begin{aligned} AT \cdot QC &= AQ \cdot (TQ + QC) - AT \cdot QC = AQ \cdot TQ + AQ \cdot QC - AT \cdot QC \\ &= AQ \cdot TQ + QC(AQ - AT) = AQ \cdot TQ + QC \cdot TQ = AC \cdot TQ. \end{aligned}$$

□

Câu 5

Ban đầu trên bảng viết cặp số có thứ tự $(2; 3)$. Mỗi bước bạn Phú được phép thay thế cặp $(x; y)$ trên bảng bằng một trong các cặp $(y; x), (-x; y), (y - x; y)$.

- Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước bạn Phú viết được cặp $(4; 1)$ lên bảng.
- Hỏi sau hữu hạn bước bạn Phú có viết được cặp $(2026; 2027)$ lên bảng hay không?

Lời giải.

Từ các phép biến đổi ở đề bài, ta quy về được các phép biến đổi sau:

- Đổi chỗ hai số (đã được cho ở đề bài).
- Đổi dấu một số bất kỳ: Theo đề bài ta có thể đổi dấu số thứ nhất. Đối với số thứ hai ta có thể đổi dấu như sau:

$$(x, y) \rightarrow (y, x) \rightarrow (-y, x) \rightarrow (x, -y).$$

- Cộng hoặc trừ vào một số bởi số còn lại: Ta có thể làm như sau

$$(x, y) \rightarrow (y - x, y) \rightarrow (x - y, y)$$

$$(x, y) \rightarrow (x, -y) \rightarrow (x - (-y), y) = (x + y, y)$$

$$(x, y) \rightarrow (y, x) \rightarrow (y - x, x) \rightarrow (x, y - x)$$

$$(x, y) \rightarrow (y, x) \rightarrow (y + x, x) \rightarrow (x, y + x)$$

a) Ta làm như sau

$$(2, 3) \rightarrow (2, 3 - 2) = (2, 1) \rightarrow (2 + 1, 1) = (3, 1) \rightarrow (3 + 1, 1) = (4, 1).$$

b) Ta thực hiện được bằng cách tiếp tục quá trình câu a

$$(4, 1) \rightarrow (5, 1) \rightarrow \dots \rightarrow (2026, 1)$$

rồi sau đó

$$(2026, 1) \rightarrow (2026, 1 + 2026) = (2026, 2027).$$

□

