

Bài 1. (2,0 điểm)

- Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-12}{x-3\sqrt{x}+2} - \frac{7}{\sqrt{x}-1} + \frac{8}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.
- Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1x_2 = 3$.

Bài 2. (2,0 điểm)

- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^3 - y^3 = x - y \\ 2x^2 + 5xy + 5y^2 = 1. \end{cases}$$
- Cho đa thức $P(x)$. Biết rằng, khi chia $P(x)$ cho đa thức x ta được phần dư bằng 2026 và khi chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 1$ ta được đa thức dư là $5x + 2044$. Tính $P(1)$ và tìm đa thức dư khi chia $P(x)$ cho đa thức $Q(x) = x(x^2 - 1)$.

Bài 3. (2,0 điểm)

- Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + q^2 + 30$ là số chính phương.
- Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:
a) $ab + bc + ca \leq 3$. b) $\frac{a}{\sqrt{2(a^4+7)}} + \frac{b}{\sqrt{2(b^4+7)}} + \frac{c}{\sqrt{2(c^4+7)}} \leq \frac{3}{4}$.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và có đường cao AD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên các đường thẳng AB, AC .

- Chứng minh rằng tứ giác $BCFE$ nội tiếp.
- Kẻ đường kính AG của đường tròn (O) và gọi I là trung điểm đoạn thẳng GD . Chứng minh rằng $IE = IF$.
- Gọi R là giao điểm của đường tròn (O) và đường thẳng AD ($R \neq A$), đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q . Chứng minh rằng D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PQR .

Bài 5. (1,0 điểm)

- Trong hộp có 5 quả bóng, mỗi quả được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; 5 (hai quả bóng khác nhau ghi hai số khác nhau). Bạn An chọn ngẫu nhiên đồng thời hai quả bóng trong hộp. Tính xác suất để bạn An chọn được hai quả bóng có tổng bình phương của hai số ghi trên hai quả bóng là một số nguyên tố.

2. Cho bảng ô vuông 6×6 (là bảng gồm 6 hàng và 6 cột, mỗi hàng và mỗi cột gồm 6 ô vuông) như hình vẽ bên dưới. Hỏi có thể ghi được hay không vào mỗi ô vuông của bảng một trong các số 1; 2; 3; 5 sao cho tổng các số trên mỗi hàng chia hết cho 11, đồng thời tổng các số trên mỗi cột chia hết cho 13?

Bảng 6×6

— HẾT —

(Khi làm bài thi này, thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay, không được sử dụng tài liệu)

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THÀNH PHỐ ĐỒNG NAI

Năm học: 2026 - 2027

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Trần Thị Thu Nga*, Đặng Văn Huy Hoàng[†], Nguyễn Thái Hưng[‡]

Ngày 29 tháng 5 năm 2026

Bài 1 (2 điểm).

- Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-12}{x-3\sqrt{x}+2} - \frac{7}{\sqrt{x}-1} + \frac{8}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.
- Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1 x_2 = 3. \quad (1)$$

Bài 2 (2,0 điểm).

- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^3 - y^3 = x - y, \\ 2x^2 + 5xy + 5y^2 = 1. \end{cases}$$
- Cho đa thức $P(x)$. Biết rằng, khi chia $P(x)$ cho đa thức x ta được phần dư bằng 2026 và khi chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 1$ ta được đa thức dư là $5x + 2044$. Tính $P(1)$ và tìm đa thức dư khi chia $P(x)$ cho đa thức $Q(x) = x(x^2 - 1)$.

Bài 3 (2 điểm).

- Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + q^2 + 30$ là số chính phương.
- Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

*Giáo viên tại trường THCS Trảng Dài, Đồng Nai

[†]Giáo viên tự do tại Đồng Nai

[‡]NCS tại Đại học Florida, Hoa Kỳ

(a) $ab + bc + ca \leq 3$.

(b) $\frac{a}{\sqrt{2(a^4 + 7)}} + \frac{b}{\sqrt{2(b^4 + 7)}} + \frac{c}{\sqrt{2(c^4 + 7)}} \leq \frac{3}{4}$.

Bài 4 (3 điểm). Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và có đường cao AD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên các đường thẳng AB, AC .

- Chứng minh rằng tứ giác $BCFE$ nội tiếp.
- Kẻ đường kính AG của đường tròn (O) và gọi I là trung điểm đoạn thẳng GD . Chứng minh rằng $IE = IF$.
- Gọi R là giao điểm của đường tròn (O) và đường thẳng AD ($R \neq A$), đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q . Chứng minh rằng D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PQR .

Bài 5 (1 điểm).

- Trong hộp có 5 quả bóng, mỗi quả được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; 5 (hai quả bóng khác nhau ghi hai số khác nhau). Bạn An chọn ngẫu nhiên đồng thời hai quả bóng trong hộp. Tính xác suất để bạn An chọn được hai quả bóng có tổng bình phương của hai số ghi trên hai quả bóng là một số nguyên tố.
- Cho bảng ô vuông 6×6 (là bảng gồm 6 hàng và 6 cột, mỗi hàng và mỗi cột gồm 6 ô vuông) như hình vẽ bên dưới. Hỏi có thể ghi được hay không vào mỗi ô vuông của bảng một trong các số 1; 2; 3; 5 sao cho tổng các số trên mỗi hàng chia hết cho 11, đồng thời tổng các số trên mỗi cột chia hết cho 13?

Bảng 6×6

— HẾT —

LỜI GIẢI THAM KHẢO VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THÀNH PHỐ

ĐỒNG NAI

Năm học: 2026 - 2027

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Trần Thị Thu Nga*, Đậu Văn Huy Hoàng[†], Nguyễn Thái Hưng[‡]

Ngày 29 tháng 5 năm 2026

Bài 1 (2 điểm).

- Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x} - 12}{x - 3\sqrt{x} + 2} - \frac{7}{\sqrt{x} - 1} + \frac{8}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$.
- Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1x_2 = 3. \quad (1)$$

Lời giải.

*Giáo viên tại trường THCS Trảng Dài, Đồng Nai

[†]Giáo viên tự do tại Đồng Nai

[‡]NCS tại Đại học Florida, Hoa Kỳ

1. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\sqrt{x} - 12}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)} - \frac{7}{\sqrt{x} - 1} + \frac{8}{\sqrt{x} - 2} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 12 - 7\sqrt{x} + 14 + 8\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{3\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{3(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x} - 1}. \end{aligned}$$

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' = 4 - m + 2 = 6 - m > 0.$$

Điều này tương đương với $m < 6$. Theo định lý Viète, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 x_2 = m - 2. \end{cases}$$

Từ đẳng thức (1), ta suy ra $x_1, x_2 \neq 0$ nên $x_1 x_2 \neq 0$. Do đó $m - 2 \neq 0$ hay $m \neq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1 x_2 &= 3 \\ \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} - x_1 x_2 &= 3 \\ \frac{4}{m - 2} - (m - 2) &= 3 \\ \frac{-m^2 + 4m - 4 + 4}{m - 2} &= 3 \\ -m^2 + 4m &= 3m - 6 \\ m^2 - m - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Ta được $m = 3$ hoặc $m = -2$. Kết hợp với $m < 6$ và $m \neq 2$, ta nhận cả hai giá trị này của m .

Vậy $m \in \{-2; 3\}$.

Nhận xét: Đây là một câu hỏi dễ nhằm giúp học sinh đạt được mức điểm trên liệt, chỉ đòi hỏi kĩ năng cơ bản về biến đổi biểu thức chứa căn và áp dụng định lý Viète. Một lưu ý quan trọng ở ý 2, chính là học sinh cần để ý điều kiện của hai nghiệm là $x_1, x_2 \neq 0$ và từ đó thu được $m \neq 2$.

Bài 2 (2,0 điểm).

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^3 - y^3 = x - y, \\ 2x^2 + 5xy + 5y^2 = 1. \end{cases}$$

2. Cho đa thức $P(x)$. Biết rằng, khi chia $P(x)$ cho đa thức x ta được phần dư bằng 2026 và khi chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 1$ ta được đa thức dư là $5x + 2044$. Tính $P(1)$ và tìm đa thức dư khi chia $P(x)$ cho đa thức $Q(x) = x(x^2 - 1)$.

Lời giải.

1. Từ hệ phương trình, ta thu được

$$\begin{aligned} 3x^3 - y^3 &= (x - y)(2x^2 + 5xy + 5y^2) \\ 3x^3 - y^3 &= 2x^3 + 5x^2y + 5xy^2 - 2x^2y - 5xy^2 - 5y^3 \\ x^3 - 3x^2y + 4y^3 &= 0 \\ (x + y)(x - 2y)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Suy ra $x = -y$ hoặc $x = 2y$.

- Với $x = -y$, thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$2y^2 = 1 \quad \text{hay} \quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy trường hợp này ta thu được

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}.$$

- Với $x = 2y$, thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$23y^2 = 1 \quad \text{hay} \quad y = \pm \frac{\sqrt{23}}{23}.$$

Vậy trường hợp này ta thu được

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{2\sqrt{23}}{23}, \frac{\sqrt{23}}{23} \right), \left(-\frac{2\sqrt{23}}{23}, -\frac{\sqrt{23}}{23} \right) \right\}.$$

2. Ký hiệu $\deg H$ là bậc của một đa thức $H(x)$. Đặt

$$P(x) = Q(x) \cdot U(x) + V(x), \tag{2}$$

trong đó $U(x), V(x)$ là các đa thức và $\deg V < \deg Q = 3$. Do đó, $V(x)$ có dạng

$$V(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Từ (2) và (3), ta được

$$P(x) = x(x^2 - 1)U(x) + ax^2 + bx + c. \tag{4}$$

Vì khi chia $P(x)$ cho x ta được phần dư bằng 2026, nên theo định lý Bezout, ta suy ra

$$P(0) = 2026.$$

Từ (4), ta được $c = 2026$. Hơn nữa, khi chia $P(x)$ cho $x^2 - 1$ ta được đa thức dư là $5x + 2044$, nên theo định lý Bezout, ta được

$$P(1) = 5 \cdot 1 + 2044 = 2049 \quad \text{và} \quad P(-1) = 5 \cdot (-1) + 2044 = 2039.$$

Kết hợp với (4), ta có

$$\begin{cases} a + b + c = 2049 \\ a - b + c = 2039 \end{cases}.$$

Hơn nữa $c = 2026$, nên ta suy ra $a = 18$ và $b = 5$. Vậy đa thức dư trong phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$ là

$$V(x) = 18x^2 + 5x + 2026.$$

Nhận xét:

- Ý 1) là dạng giải hệ phương trình đẳng cấp. Thoạt nhìn, đây là một ý rất khó vì ta hoàn toàn không thể khai thác gì từ từng phương trình. Vì vậy, ta cần tìm cách biến đổi để đưa về phương trình có cùng bậc ở hai vế. Do đó, ta sẽ nhân $(3x^3 - y^3)$ với 1 và $(x - y)$ với $(2x^2 + 5xy + 5y^2)$ để đưa về phương trình đẳng cấp bậc 3. Điều còn lại là phân tích đa thức thành nhân tử để thu được mối liên hệ chặt chẽ hơn giữa x và y .
- Ý 2) là một câu về đa thức. Học sinh cần vận dụng tốt định lý Bezout để xác định dạng của đa thức dư $V(x)$, là một đa thức có bậc nhỏ hơn 3, và thực hiện các tính toán cần thiết. Từ đó suy ra $V(x) = ax^2 + bx + c$ và sử dụng các giả thiết của bài toán để xác định được các hệ số a, b, c .

Bài 3 (2 điểm).

- Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + q^2 + 30$ là số chính phương.
- Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

(a) $ab + bc + ca \leq 3$.

(b) $\frac{a}{\sqrt{2(a^4 + 7)}} + \frac{b}{\sqrt{2(b^4 + 7)}} + \frac{c}{\sqrt{2(c^4 + 7)}} \leq \frac{3}{4}$.

Lời giải.

- Ta có một kết quả quen thuộc sau: Với x là số nguyên, ta có

$$x^2 \equiv \begin{cases} 1 \pmod{3} & \text{nếu } 3 \nmid x \\ 0 \pmod{3} & \text{nếu } 3 \mid x \end{cases}.$$

Nói cách khác, một số chính phương chỉ chia 3 dư 0 hoặc 1. Giả sử p và q là hai số nguyên tố cần tìm.

- Nếu p và q đều khác 3, mà p, q đều là số nguyên tố nên $3 \nmid p$ và $3 \nmid q$. Do đó

$$p^2 + q^2 + 30 \equiv 1 + 1 + 30 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Do đó $p^2 + q^2 + 30$ không thể là số chính phương.

- Nếu $p = 3$ thì $p^2 + q^2 + 30 = q^2 + 39$. Đặt $q^2 + 39 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$(k - q)(k + q) = 39.$$

Vì $k - q < k + q$ và $k + q > 0$ nên

$$\begin{cases} k - q = 1 \\ k + q = 39 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} k = 20 \\ q = 19 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} k - q = 3 \\ k + q = 13 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} k = 8 \\ q = 5 \end{cases}.$$

Vậy trường hợp này ta được $(p, q) = (3; 19)$ hoặc $(p, q) = (3; 5)$.

- Nếu $q = 3$, tương tự trường hợp trên, ta thu được $(p, q) = (19; 3)$ hoặc $(p, q) = (5; 3)$.

Vậy các bộ số thoả mãn bài toán này là

$$(3; 5), (5; 3), (3; 19), (19; 3)$$

2. (a) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^3 + b^3 + 1 \geq 3ab, \quad b^3 + c^3 + 1 \geq 3bc \quad \text{và} \quad c^3 + a^3 + 1 \geq 3ca.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta được

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \geq 3(ab + bc + ca).$$

Kết hợp với $a^3 + b^3 + c^3 = 1$, dẫn đến $ab + bc + ca \leq 3$.

- (b) Trong ý này, ta sẽ sử dụng bất đẳng thức

$$(u^2 + v^2)(x^2 + y^2) \geq (ux + vy)^2 \quad \text{với mọi } u, v, x, y \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{2(a^4 + 7)}} &= \frac{\sqrt{8}a}{\sqrt{2}\sqrt{(1+7)(a^4+7)}} \leq \frac{\sqrt{8}a}{\sqrt{2(a^2+7)^2}} \\ &= \frac{2a}{a^2+7} = \frac{2a}{a^2+1+6} \\ &\leq \frac{2a}{2a+6} = \frac{a}{a+3}. \end{aligned} \tag{5}$$

Mặt khác, lại áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{x+y+z+t} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \quad \text{với mọi } x, y, z, t > 0,$$

ta được

$$\frac{a}{a+3} = \frac{a}{a+1+1+1} \leq a \cdot \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + 3 \right) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16}a. \quad (6)$$

Từ (5) và (6), ta thu được

$$\frac{a}{\sqrt{2(a^4+7)}} \leq \frac{1}{16} + \frac{3}{16}a.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{b}{\sqrt{2(b^4+7)}} \leq \frac{1}{16} + \frac{3}{16}b \quad \text{và} \quad \frac{c}{\sqrt{2(c^4+7)}} \leq \frac{1}{16} + \frac{3}{16}c.$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{a}{\sqrt{2(a^4+7)}} + \frac{b}{\sqrt{2(b^4+7)}} + \frac{c}{\sqrt{2(c^4+7)}} \leq \frac{3}{16} + \frac{3}{16}(a+b+c). \quad (7)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^3 + 1 + 1 \geq 3a, \quad b^3 + 1 + 1 \geq 3b \quad \text{và} \quad c^3 + 1 + 1 \geq 3c.$$

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geq 3(a+b+c)$, dẫn đến $a+b+c \leq 3$. Vì vậy, từ (7), ta kết luận

$$\frac{a}{\sqrt{2(a^4+7)}} + \frac{b}{\sqrt{2(b^4+7)}} + \frac{c}{\sqrt{2(c^4+7)}} \leq \frac{3}{4}.$$

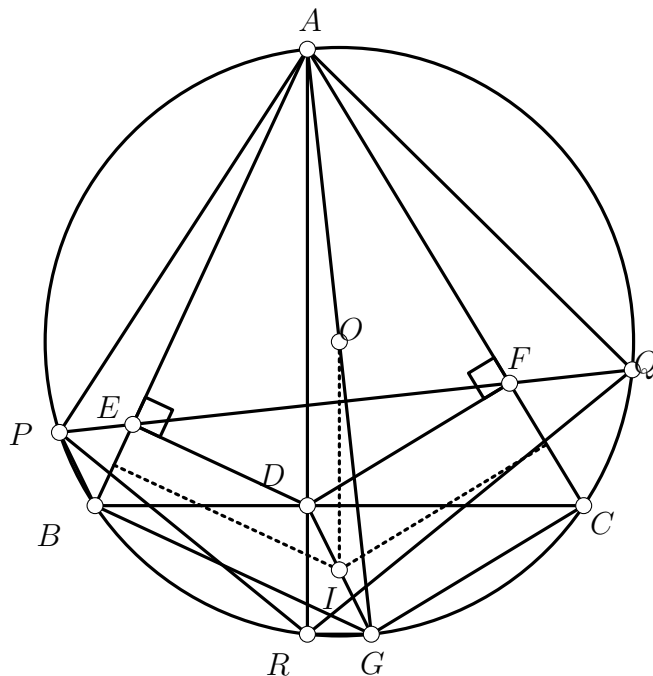
Nhận xét:

- Ý 1) là một câu số học cơ bản. Nếu nắm được tính chất $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$, ta dễ dàng chia các trường hợp của p, q để xác định được cặp số cần tìm.
- Ý 2) là một câu bất đẳng thức gồm 2 ý nhỏ hơn. Ý thứ 2 dễ làm học sinh rồi và mất phương hướng khi xử lý. Tuy nhiên, ý tưởng rất đơn giản là đi “giảm bậc” biểu thức ở dưới mẫu bằng các kĩ thuật quen thuộc. Ta cố gắng biến đổi dần dần để bậc của tử và mẫu bằng nhau, và từ đó thu được kết quả cần chứng minh.

Bài 4 (3 điểm). Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và có đường cao AD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên các đường thẳng AB, AC .

- Chứng minh rằng tứ giác $BCFE$ nội tiếp.
- Kẻ đường kính AG của đường tròn (O) và gọi I là trung điểm đoạn thẳng GD . Chứng minh rằng $IE = IF$.

Lời giải.



Xét tứ giác $AEDF$ có $\widehat{AED} + \widehat{AFD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, suy ra tứ giác $AEDF$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ADF}$. Mặt khác, $\widehat{ACD} = \widehat{ADF}$ (cùng phụ $\widehat{DAF}$). Từ đó suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$. Vậy $AEDF$ nội tiếp.

Xét tam giác GAD có O là trung điểm AG , I là trung điểm DG nên OI là đường trung bình của tam giác GAD . Suy ra $OI \parallel AD$. Suy ra $OI \perp BC$. Mà $OB = OC$, suy ra OI là đường trung trực của BC . Suy ra

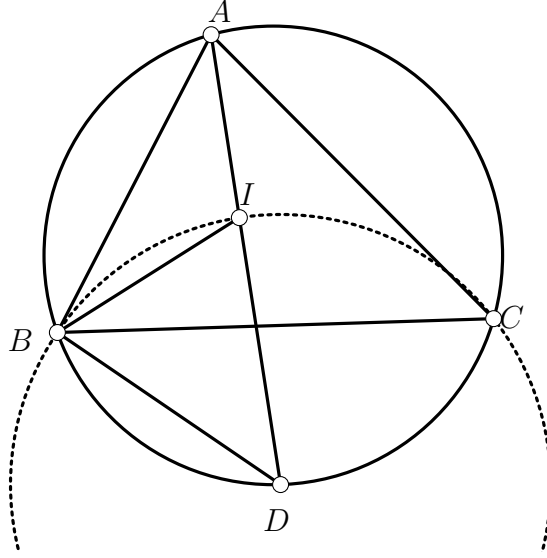
Vì $ED \perp AB$, $BG \perp AB$ nên $ED \parallel BG$, từ đó $EDGB$ là hình thang. Gọi J là trung điểm của EB . Khi đó JI là đường trung bình của hình thang $EDGB$. Suy ra $JI \parallel EB$. Mà $BG \perp BE$ nên $JI \perp BG$. Suy ra JI là đường trung trực của EB . Suy ra

Tương tự như vậy, gọi H là trung điểm FC , ta chứng minh được HI là trung trực của FC . Suy ra

7

Từ (8), (9) và (10), ta suy ra $IB = IC = IE = IF$ và I là tâm của $(BCEF)$.

- 3) Ta có bổ đề sau: “Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Đường phân giác trong góc A cắt lại (O) tại D . Lấy I trên AD sao cho $DI = DB$. Khi đó I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .”



Chứng minh. Từ $DB = DI$, suy ra tam giác DBI cân tại D , suy ra $\widehat{DBI} = \widehat{DIB}$.

Ta có $\widehat{IBC} = \widehat{IBD} - \widehat{DBC} = \widehat{DIB} - \widehat{DAC} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI} - \widehat{CAD} = \widehat{ABI}$.

Suy ra BI là phân giác của $\widehat{B}$. Kết hợp AI là phân giác của $\widehat{A}$, ta được I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

Quay trở lại bài toán ban đầu. Để chứng minh D là tâm đường tròn nội tiếp của PQR , ta sẽ chứng minh RD là phân giác của $\widehat{PRQ}$ và $AP = AD$.

Ta có $\widehat{GAC} + \widehat{AFE} = 90^\circ - \widehat{AGC} + \widehat{AFE} = 90^\circ - \widehat{ABC} + \widehat{AFE} = 90^\circ$. Do đó $AG \perp PQ$. Mà $OP = OQ$ nên AG là đường trung trực của PQ . Suy ra $AP = AQ$. Suy ra tam giác APQ cân tại A . Suy ra $\widehat{APQ} = \widehat{AQP}$. Suy ra $\widehat{PRA} = \widehat{QRA}$. Suy ra

$$RA \text{ là phân giác } \widehat{PRQ}. \quad (11)$$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ADB , ta có $AD^2 = AE \cdot AB$. Ta cần chứng minh được $AP^2 = AE \cdot AB$. Thật vậy, xét tam giác $\triangle APE$ và $\triangle ABP$, ta có $\widehat{APE} = \widehat{ABP}$ (cùng bằng $\widehat{AQP}$) và $\widehat{PAE}$ là góc chung. Do đó $\triangle APE \sim \triangle ABP$ (g - g). Suy ra $\frac{AP}{AE} = \frac{AB}{AP}$. Suy ra $AP^2 = AB \cdot AE$. Mà $AD^2 = AE \cdot AB$. Suy ra

$$AP = AD. \quad (12)$$

Từ (11), (12) và áp dụng với bổ đề nêu trên, ta suy ra D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PQR .

Nhận xét:

- a) Ta nghĩ đến ý tưởng chứng minh tứ giác nội tiếp thông qua các góc vì bài toán xuất hiện nhiều các mô hình tam giác vuông với đường cao.
- b) Thoạt nhìn, ta có thể dễ dàng chứng minh được OI là trung trực của BC . Đường như các ý tưởng về góc là rất khó triển khai vì các điểm rời rạc, chưa có nhiều tính chất kết nối. Do đó, ta có thể nghĩ đến ý tưởng chứng minh I là tâm của $(BCFE)$ thông qua các đường trung trực. Mấy chốt là ta kẻ thử trung trực của EB và nhận ra hình thang vuông $EDGB$ cũng như cấu trúc tương tự với trung trực của FC .
- c) Ta có thể chứng minh được RA là phân giác của $\widehat{PRQ}$. Nhưng nếu muốn chứng minh PD là phân giác $\widehat{QPR}$ (hay QD là phân giác $\widehat{PQR}$), ta sẽ gặp nhiều khó khăn vì các điểm P, Q, D có tương đối ít kết nối với nhau về mặt góc. Do đó, ta sử dụng một hướng chứng minh tâm nội tiếp thường gặp khi xuất hiện đường tròn ngoại tiếp, chính là bỏ đề đã nêu ở lời giải trên.

Bài 5 (1 điểm).

- Trong hộp có 5 quả bóng, mỗi quả được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; 5 (hai quả bóng khác nhau ghi hai số khác nhau). Bạn An chọn ngẫu nhiên đồng thời hai quả bóng trong hộp. Tính xác suất để bạn An chọn được hai quả bóng có tổng bình phương của hai số ghi trên hai quả bóng là một số nguyên tố.
- Cho bảng ô vuông 6×6 (là bảng gồm 6 hàng và 6 cột, mỗi hàng và mỗi cột gồm 6 ô vuông) như hình vẽ bên dưới. Hỏi có thể ghi được hay không vào mỗi ô vuông của bảng một trong các số 1; 2; 3; 5 sao cho tổng các số trên mỗi hàng chia hết cho 11, đồng thời tổng các số trên mỗi cột chia hết cho 13?

Bảng 6×6

Lời giải.

- Số cách chọn đồng thời 2 quả bóng trong hộp

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ cách.}$$

Ngoài ra, ta nhận thấy có đúng 5 cặp số (a, b) ($1 \leq a < b \leq 5$) sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố, đó là

$$(a, b) \in \{(1; 2), (2; 3), (2; 5), (1; 4), (4; 5)\}.$$

Do bạn An chọn đồng thời hai quả bóng nên cặp bóng $(a; b)$ cũng là cặp bóng $(b; a)$. Vì vậy, xác suất bạn An chọn được 2 quả bóng theo yêu cầu bài toán là

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

2. Giả sử tồn tại một cách ghi thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vì mỗi ô trong bảng chỉ được điền các số 1; 2; 3; 5 nên ta có hai nhận xét sau:

- Vì tổng các số trên mỗi hàng chia hết cho 11 nên tổng lớn nhất có thể thu được là

$$5 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 = 22 = 2 \cdot 11.$$

- Vì tổng các số trên mỗi cột chia hết cho 13 nên tổng lớn nhất có thể thu được là

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 1 = 26 = 2 \cdot 13.$$

Khi đó, tổng tất cả các số của 6 hàng có dạng $11h_i$ ($h_i \in \{1; 2\}$ với $1 \leq i \leq 6$) và tổng tất cả các số của 6 cột có dạng $13c_j$ ($c_j \in \{1; 2\}$ với $1 \leq j \leq 6$).

Gọi A là tổng các số trong tất cả 36 ô trong bảng. Khi đó

$$A = 11(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6) = 13(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6). \quad (13)$$

Suy ra $A : 11$ và $A : 13$, mà $\gcd(11; 13) = 1$ nên $A : 143$. Từ (13) và $h_i, c_i \in \{1; 2\}$, ta suy ra

$$\begin{aligned} 11(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) &\leq A \leq 13(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) \\ 66 &\leq A \leq 156. \end{aligned}$$

Kết hợp với $A : 143$, ta thu được $A = 143$. Tuy nhiên,

$$A = 11(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6) \leq 11(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) = 132 < 144.$$

Điều này vô lý do $A = 143$. Như vậy, không tồn tại cách ghi thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét:

- Ý 1) là một bài tập đếm cơ bản, học sinh cần lưu ý ở đây là lấy "đồng thời", do đó cặp (a, b) và cặp (b, a) chỉ được tính là một.
- Ý 2) có thể nói là một trong những câu khó nhất trong đề, thuộc phân môn Tổ hợp. Ở đây học sinh cần xác định được phạm vi của tổng các số trên mỗi hàng và mỗi cột dựa trên các số có thể điền vào bảng. Khi đó, một nhận xét quan trọng là A -tổng tất cả các số trên bảng chính là tổng của cả 6 hàng cũng như tổng của cả 6 cột. Một hệ quả tất yếu là xác định phạm vi của A và từ đó thu được $A = 143$. Khi đó sau một vài bước lập luận và ta sẽ thu được điều vô lý.

— HẾT —