

**Câu 1.** (3,00 điểm)

a) Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn:  $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2y + xy^2 = -21 \end{cases}$ . Tính giá trị các biểu thức sau:

$$M = xy; N = x^2 + y^2; P = x^3 + y^3; Q = |x - y|.$$

b) Giải phương trình  $\sqrt{3x+3} + \sqrt{x^2+5} + 4x^2 + 2x = 26$ .

c) Với  $x$  là số thực và  $x \geq 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 4x^2 - 19x + 58 + 5\sqrt{x+1}.$$

**Câu 2.** (2,00 điểm)

a) Tìm đa thức bậc ba  $P(x)$  với hệ số nguyên, biết đa thức  $P(x)$  có nghiệm  $x = 1$ ,  $P(-1) = -4$  và  $P(1 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$ .

b) Cô giáo mang lên lớp hai chiếc hộp, trong mỗi hộp chỉ có bi màu xanh và bi màu đỏ, mỗi hộp đựng không quá 20 viên bi. Cô gọi bạn An lên thực nghiệm, An sẽ kiểm kê số lượng và màu sắc bi trong hộp thứ nhất, rồi tính xác suất bốc được bi xanh khi bốc ngẫu nhiên 1 viên trong hộp này. Cô cũng gọi bạn Bình lên thực hiện tương tự như vậy đối với hộp thứ hai. Biết rằng hai bạn đều tính đúng và tổng xác suất tính được của hai bạn là  $\frac{142}{143}$ . Hỏi trong cả hai hộp có bao nhiêu viên bi xanh?

**Câu 3.** (1,50 điểm) Cho tam giác  $ABC$  ( $AB < AC$ ) vuông tại  $A$  có đường phân giác  $AD$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ  $D$  đến  $AB$  và  $AC$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $DE$  và  $BF$ ,  $K$  là giao điểm của  $CE$  và  $DF$ . Chứng minh rằng:

a)  $\frac{IE}{ID} = \frac{EB}{EA}$ .

b)  $IK$  song song với  $BC$ .

c)  $AK$  vuông góc với  $BF$ .

**Câu 4.** (1,50 điểm) Cho tứ giác lồi  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  cắt nhau ở  $K$ . Trên cung nhỏ  $BC$  lấy điểm  $E$  ( $E \neq B, C$ ). Đường thẳng  $KE$  cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $ABK$  và  $CDK$  lần lượt tại  $G, H$  ( $G, H \neq K$ ) và cắt đường tròn  $(O)$  tại  $F$  ( $F \neq E$ ). Chứng minh rằng:

a) Tam giác  $ADF$  đồng dạng với tam giác  $AEG$ .

b)  $EG = HF$ .

**Câu 5.** (1,00 điểm) Cho  $a, b, c$  là các số nguyên dương, trong đó  $a, b$  là hai số nguyên tố cùng nhau và  $(a^2b + ab^2 + c^3)$  chia hết cho  $ac$ . Chứng minh rằng số  $a$  là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên dương.

**Câu 6.** (1,00 điểm) Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + ab}{b^2 + 3} + \frac{b^2 + bc}{c^2 + 3} + \frac{c^2 + ca}{a^2 + 3} \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}.$$

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .....; Số báo danh: .....

Chữ ký của giám thị 1: .....; Chữ ký của giám thị 2: .....

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI**  
**MÔN: TOÁN (CHUYÊN) - ĐỀ CHÍNH THỨC**  
(*Hướng dẫn chấm có 05 trang*)

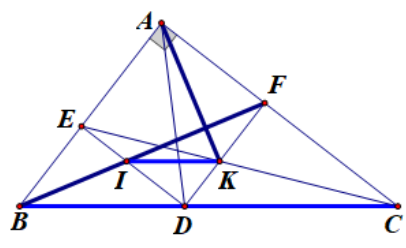
**1. Hướng dẫn chung**

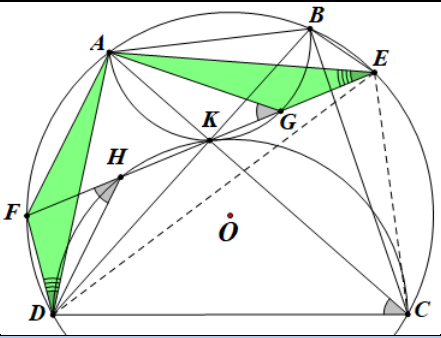
- Nếu thí sinh làm bài không theo cách được trình bày trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định;
- Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm chấm phải bảo đảm không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi;
- Điểm bài thi không làm tròn số, có thể lẻ đến 0,25.

**2. Nội dung và thang điểm**

| Câu              | Nội dung                                                                                                                                                                                          | Điểm             |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| Câu 1.<br>(3,00) | a) Cho hai số thực $x, y$ thỏa mãn: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 y + xy^2 = -21 \end{cases}$ . Tính giá trị các biểu thức sau : $M = xy$ ; $N = x^2 + y^2$ ; $P = x^3 + y^3$ ; $Q =  x - y $ . | <b>1,00 điểm</b> |
|                  | Từ $xy(x + y) = -21 \Rightarrow xy = -3$ hay $M = -3$                                                                                                                                             | 0,25             |
|                  | $N = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 7^2 - 2(-3) = 55$                                                                                                                                              | 0,25             |
|                  | $P = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 7(55 + 3) = 406$                                                                                                                                       | 0,25             |
|                  | $Q =  x - y  = \sqrt{(x - y)^2} = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{55 - 2(-3)} = \sqrt{61}$                                                                                                         | 0,25             |
|                  | b) Giải phương trình $\sqrt{3x+3} + \sqrt{x^2+5} + 4x^2 + 2x = 26$                                                                                                                                | <b>1,00 điểm</b> |
|                  | Đk : $3x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$                                                                                                                                                      | 0,25             |
|                  | Phương trình viết lại : $(\sqrt{3x+3} - 3) + (\sqrt{x^2+5} - 3) + (4x^2 + 2x - 20) = 0$<br>$\Leftrightarrow \frac{3x+3-9}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{x^2+5-9}{\sqrt{x^2+5}+3} + (x-2)(4x+10) = 0$     | 0,25             |
|                  | $\Leftrightarrow (x-2) \left( \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} + 4x+10 \right) = 0 (*)$                                                                                       | 0,25             |
|                  | Kết hợp điều kiện, ta có: $\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} > 0$ ; $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} > 0$ ; $4x+10 > 0$<br>Nên từ (*) suy ra $x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .                                   | 0,25             |
|                  | c) Với $x$ là số thực và $x \geq 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:<br>$A = 4x^2 - 19x + 58 + 5\sqrt{x+1}$ .                                                                                | <b>1,00 điểm</b> |
|                  | Viết lại $A = 4(x-3)^2 + 5(x-3) + 37 + 5\sqrt{x+1}$                                                                                                                                               | 0,25             |
|                  | Khi đó với $x \geq 3$<br>$\Rightarrow 4(x-3)^2 + 5(x-3) + 37 \geq 37$ ( dấu bằng xảy ra khi $x = 3$ )<br>$5\sqrt{x+1} \geq 5\sqrt{3+1} = 10$                                                      | 0,25             |
|                  | Suy ra $A = 4(x-3)^2 + 5(x-3) + 37 + 5\sqrt{x+1} \geq 37 + 10 = 47$                                                                                                                               | 0,25             |
|                  | Vậy giá trị nhỏ nhất của $A$ bằng 47 khi $x = 3$                                                                                                                                                  | 0,25             |
| Câu 2.<br>(2,00) | a) Tìm đa thức bậc ba $P(x)$ với hệ số nguyên, biết đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = 1$ ; $P(-1) = -4$ và $P(1 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$ .                                                        | <b>1,00 điểm</b> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| <p><b>Cách 1:</b> Vì <math>x = 1</math> là 1 nghiệm của đa thức <math>P(x)</math><br/> <math>\Rightarrow P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c), a \neq 0</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,25             |
| $P(-1) = -4 \Rightarrow -2(a-b+c) = -4 \Leftrightarrow a-b+c = 2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,25             |
| $P(1-\sqrt{2}) = 6-4\sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \left[ a(1-\sqrt{2})^2 + b(1-\sqrt{2}) + c \right] = 6-4\sqrt{2}$<br>$\Leftrightarrow 4a+2b-(3a+b+c)\sqrt{2} = 6-4\sqrt{2}$<br>Suy ra $\begin{cases} 4a+2b=6 \\ 3a+b+c=4 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,25             |
| Giải hệ $\begin{cases} a-b+c=2 \\ 4a+2b=6 \\ 3a+b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$<br>Vậy $P(x) = (x-1)(2x^2 - x - 1)$ hay $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,25             |
| <p><b>Cách 2:</b> <math>P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d</math><br/> Theo giả thiết <math>P(1) = 0 \Rightarrow a+b+c+d = 0</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,25             |
| $P(-1) = -4 \Rightarrow -a+b-c+d = -4$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,25             |
| $P(1-\sqrt{2}) = 6-4\sqrt{2} \Leftrightarrow a(1-\sqrt{2})^3 + b(1-\sqrt{2})^2 + c(1-\sqrt{2}) + d = 6-4\sqrt{2}$<br>$\Leftrightarrow a(7-5\sqrt{2}) + b(3-2\sqrt{2}) + c(1-\sqrt{2}) + d = 6-4\sqrt{2}$<br>$\Leftrightarrow 7a+3b+c+d + (-5a-2b-c)\sqrt{2} = 6-4\sqrt{2}$<br>Suy ra $\begin{cases} 7a+3b+c+d=6 \\ -5a-2b-c=-4 \end{cases}$                                                                                                                                                                                          | 0,25             |
| Giải hệ $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -a+b-c+d=-4 \\ 7a+3b+c+d=6 \\ -5a-2b-c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$<br>Vậy $P(x) = (x-1)(2x^2 - x - 1)$ hay $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,25             |
| <p>b) Cô giáo mang lên lớp hai chiếc hộp, trong mỗi hộp chỉ có bi màu xanh và bi màu đỏ, mỗi hộp đựng không quá 20 viên bi. Cô gọi bạn An lên thực nghiệm, An sẽ kiểm kê số lượng và màu sắc bi trong hộp thứ nhất, rồi tính xác suất bốc được bi xanh khi bốc ngẫu nhiên 1 viên trong hộp này. Cô cũng gọi bạn Bình lên thực hiện tương tự như vậy đối với hộp thứ hai. Biết rằng hai bạn đều tính đúng và tổng xác suất tính được của hai bạn là <math>\frac{142}{143}</math>. Hỏi trong cả hai hộp có bao nhiêu viên bi xanh?</p> | <b>1,00 điểm</b> |
| <p>Gọi <math>x, y</math> là số bi tương ứng trong mỗi hộp.<br/> <math>a, b</math> là số bi xanh tương ứng trong mỗi hộp. Với <math>a, b, x, y</math> nguyên dương và xác suất bốc bi xanh An và Bình tính được là <math>\frac{a}{x}</math> và <math>\frac{b}{y}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,25             |
| <p>Ta có phương trình <math>\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{142}{143} \Leftrightarrow \frac{ay+bx}{xy} = \frac{142}{11.13}</math>.</p> <p>Vì vế trái là phân số tối giản nên <math>xy</math> chia hết cho <math>11.13</math> mà <math>11</math> và <math>13</math> là các số nguyên tố nên trong các số <math>x, y</math> có số chia hết <math>11</math>, có số chia hết <math>13</math>.</p>                                                                                                                                      | 0,25             |
| <p>Hơn nữa theo điều kiện <math>a \leq x \leq 20; b \leq y \leq 20</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,25             |

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |             |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
|                                | $\Rightarrow 20 < 2.11 < 2.13$ nên trong hai số $x, y$ có đúng một số là 11 và một số là 13. Vì vai trò $x, y$ như nhau nên giả sử $x = 11, y = 13$ .<br>Phương trình trở thành $13a + 11b = 142$ .<br>$\text{Mà } 11a + 11b \leq 13a + 11b \leq 13a + 13b \Rightarrow 10 < \frac{142}{13} \leq a + b \leq \frac{142}{11} < 13$<br>$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 11 \\ a + b = 12 \end{cases}$<br>Trường hợp $\begin{cases} a + b = 11 \\ 13a + 11b = 142 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{21}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ Loại<br>Trường hợp $\begin{cases} a + b = 12 \\ 13a + 11b = 142 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \end{cases}$<br>Vậy trong cả hai hợp có 12 viên bi xanh. | 0,25        |
| <b>Câu 3.</b><br><b>(1,50)</b> | Cho tam giác $ABC$ ( $AB < AC$ ) vuông tại $A$ có đường phân giác $AD$ . Gọi $E, F$ lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ $D$ đến $AB$ và $AC$ . Gọi $I$ là giao điểm của $DE$ và $BF$ , $K$ là giao điểm của $CE$ và $DF$ . Chứng minh rằng:<br>a) $\frac{IE}{ID} = \frac{EB}{EA}$ .      b) $IK$ song song với $BC$ .   c) $AK$ vuông góc với $BF$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | (1,50) điểm |
|                                | a) Chứng minh $\Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{EB}{EA}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,50        |
|                                | Dễ thấy $AEDF$ là hình vuông và $EB \parallel DF$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,25        |
|                                | $\Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{EB}{DF}$ hay $\Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{EB}{EA}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,25        |
|                                | b) Chứng minh $IK$ song song với $BC$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,50        |
|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |             |
|                                | Theo câu a) $\frac{IE}{ID} = \frac{EB}{EA}$ dẫn đến $\frac{IE}{ID} = \frac{EB}{EA} = \frac{DB}{DC} = \frac{KE}{KC}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,25        |
|                                | $\Rightarrow IK \parallel DC \Rightarrow IK \parallel BC$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25        |
|                                | c) $AK$ vuông góc với $BF$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0,50        |
|                                | Vì $AEDF$ là hình vuông, kết hợp với định lí Thales ta có:<br>$\frac{FK}{FA} = \frac{FK}{AE} = \frac{CK}{CE} = \frac{CD}{CB} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AB}$ , dẫn đến $\triangle ABF \sim \triangle FAK$ (c.g.c)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25        |
|                                | $\Rightarrow \widehat{FAK} = \widehat{FBA} \Rightarrow \widehat{FAK} + \widehat{AFB} = \widehat{FBA} + \widehat{AFB} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp BF$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,25        |
| <b>Câu 4.</b><br><b>(1,50)</b> | Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$ . Hai đường chéo $AC, BD$ cắt nhau ở $K$ . Trên cung nhỏ $BC$ lấy điểm $E$ ( $E \neq B, C$ ). Đường thẳng $KE$ cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ABK$ và $CDK$ lần lượt tại $G, H$ ( $G, H \neq K$ ) và cắt đường tròn $(O)$ tại $F$ ( $F \neq E$ ). Chứng minh rằng:<br>a) Tam giác $ADF$ đồng dạng tam giác $AEG$ ;   b) $EG = HF$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1,50 điểm   |
|                                | a) Chứng minh $\triangle ADF \sim \triangle AEG$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,75        |
|                                | Xét $(O)$ ta có: $\widehat{ADF} = \widehat{AEF} = \widehat{AEG}$ (1)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,25        |

|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                   |             |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------|
|                          | $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \widehat{AGK} \quad (2)$ <p>Mặt khác, <math>ACDF</math> là tứ giác nội tiếp nên</p> $\widehat{AFD} = 180^\circ - \widehat{ACD} = 180^\circ - \widehat{AGK} = \widehat{AGE} \quad (3)$                                          |  | 0,25        |
|                          | Từ (1) và (3) suy ra $\triangle ADF \sim \triangle AEG$ (g.g)                                                                                                                                                                                                   |                                                                                   | 0,25        |
|                          | <b>b) Chứng minh: <math>EG = HF</math>.</b>                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                   | <b>0,75</b> |
|                          | Từ kết quả câu a) $\triangle ADF \sim \triangle AEG \Rightarrow \frac{EG}{EA} = \frac{DF}{DA} \quad (4)$                                                                                                                                                        |                                                                                   | 0,25        |
|                          | Tứ giác $AEDF$ nội tiếp nên $\widehat{EAD} = \widehat{EFD} = \widehat{HFD} \quad (5)$                                                                                                                                                                           |                                                                                   |             |
|                          | Tứ giác $DHKC$ và $DAEC$ nội tiếp nên $\widehat{FHD} = \widehat{KCD} = \widehat{ACD} = \widehat{AED} \quad (6)$                                                                                                                                                 |                                                                                   | 0,25        |
|                          | Từ (5), (6) $\Rightarrow \triangle FHD \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{DF}{DA} = \frac{HF}{EA} \quad (7).$                                                                                                                                                 |                                                                                   | 0,25        |
|                          | Từ (4) và (7) suy ra $\frac{EG}{EA} = \frac{HF}{EA} \Rightarrow EG = HF.$                                                                                                                                                                                       |                                                                                   | 0,25        |
| <b>Câu 5.<br/>(1,00)</b> | Cho $a, b, c$ là các số nguyên dương, trong đó $a, b$ là hai số nguyên tố cùng nhau và $(a^2b + ab^2 + c^3)$ chia hết cho $ac$ . Chứng minh rằng số $a$ là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên dương.                                                              | <b>1,00 điểm</b>                                                                  |             |
|                          | Có $(a^2b + ab^2 + c^3) : ac : a \Rightarrow c^3 : a \Rightarrow c^3 = ma$ với $m$ nguyên dương.                                                                                                                                                                |                                                                                   | 0,25        |
|                          | TH1: $m$ và $a$ không nguyên tố cùng nhau, khi đó $m$ và $a$ sẽ cùng chia hết cho số nguyên tố $p$ nào đó. Mà $c^3 = ma : p \Rightarrow c : p$ .                                                                                                                |                                                                                   | 0,25        |
|                          | Do đó: $(a^2b + ab^2 + ma) : ac \Rightarrow a(ab + b^2 + m) : ac$<br>$\Rightarrow (ab + b^2 + m) : c : p \Rightarrow b^2 : p \Rightarrow b : p$<br>Vậy $a, b$ đều chia hết $p$ nên không thể nguyên tố cùng nhau. (Vô lý)<br>Do đó trường hợp này không xảy ra. |                                                                                   | 0,25        |
|                          | TH2: $m$ và $a$ nguyên tố cùng nhau thì từ $c^3 = ma$ suy ra được $a$ là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên dương (đpcm).                                                                                                                                         |                                                                                   | 0,25        |
| <b>Câu 6.<br/>(1,00)</b> | Cho các số thực dương $a, b, c$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng:                                                                                                                                                                                  | <b>1,00 điểm</b>                                                                  |             |
|                          | $\frac{a^2 + ab}{b^2 + 3} + \frac{b^2 + bc}{c^2 + 3} + \frac{c^2 + ca}{a^2 + 3} \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}.$                                                                                                                               |                                                                                   | 0,25        |
|                          | Ta có $\frac{a^2 + ab}{b^2 + 3} = \frac{a(a+b)}{b^2 + ab + bc + ca} = \frac{a(a+b)}{(b+a)(b+c)} = \frac{a}{b+c}$<br>Vậy: $A = \frac{a^2 + ab}{b^2 + 3} + \frac{b^2 + bc}{c^2 + 3} + \frac{c^2 + ca}{a^2 + 3} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$   |                                                                                   | 0,25        |
|                          | $3A = \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) (ab + bc + ca)$ $= (a^2 + b^2 + c^2) + abc \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)$                                                                                     |                                                                                   | 0,25        |
|                          | Mà với $x, y$ dương thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$                                                                                                      |                                                                                   | 0,25        |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |      |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|  | Nên $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$                                                                                                                                                                                |      |
|  | <p>Do đó:</p> $3A \leq (a^2 + b^2 + c^2) + abc \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}(ab + bc + ca)$ $\Rightarrow 3A \leq (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3}{2} \Rightarrow A \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2} \text{ (đpcm)}$ | 0,25 |

--- HẾT ---