

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}} - \frac{7\sqrt{ab} + 10b}{a + 4b + 5\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{a + 12b + 7\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$, với $a, b > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Khi P là số nguyên, tính giá trị biểu thức $Q = \frac{a + 2025b}{a + 2026b}$.

Câu 2. (1,5 điểm)

Hai bạn An và Bình, mỗi bạn chọn ngẫu nhiên một đỉnh của lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a .

a) Mô tả không gian mẫu và các kết quả thuận lợi của biến cố M : “Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh trùng nhau”.

b) Tính xác suất của biến cố N : “Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh mà khoảng cách giữa chúng bằng $a\sqrt{3}$ ”.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{3}(x^2 - x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$.

b) Tại một Trường Trung học cơ sở A, khối lớp 8 có số học sinh nam gấp 3 lần số học sinh nữ; khối lớp 9 có số học sinh nam gấp 6 lần số học sinh nữ. Nếu tính chung cả hai khối thì tổng số học sinh là 750 và tổng số học sinh nam gấp 4 lần tổng số học sinh nữ. Hỏi khối lớp 8, khối lớp 9 ở Trường A, mỗi khối có bao nhiêu học sinh?

Câu 4. (1,5 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tất cả các số thực âm a để parabol $(P): y = x^2$ cắt đường thẳng $d_1: y = x - a$ tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 và cắt đường thẳng $d_2: y = 2x - 3a$ tại hai điểm có hoành độ x_3, x_4 thỏa mãn $\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_1 - x_4} + \frac{1}{x_2 - x_4} = \frac{1}{3}$.

b) Tồn tại hay không các số nguyên dương x, y sao cho giá trị biểu thức $\frac{x^2 + x - 2}{y^2 + 2y}$ là bình phương của một số nguyên tố? Vì sao?

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$), có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi P là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng BI .

a) Chứng minh rằng $2 \cdot \widehat{PIC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ và ba điểm P, E, F thẳng hàng.

b) Tia DI cắt các đường thẳng EF, PC lần lượt tại L, K . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, IK . Chứng minh rằng MN vuông góc với EF và $\frac{DI}{DN} + \frac{NL}{NI} = 1$.

Câu 6. (1,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Dựng hình bình hành $ABDC$. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) lấy điểm M sao cho tia DM nằm giữa tia DA và tia DC . Đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AC , cắt cạnh AB tại P và đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AB , cắt cạnh AC tại Q . Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ tại F (F khác A). Chứng minh rằng tam giác MBC đồng dạng tam giác PMA và AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF .

----- HẾT -----

GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH CHUYÊN TOÁN THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG 2026-2027

Người thực hiện: Phan Thanh Tịnh (K36 THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

1 Đề bài

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 25/5/2026

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}} - \frac{7\sqrt{ab} + 10b}{a + 4b + 5\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{a + 12b + 7\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$, với $a, b > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Khi P là số nguyên, tính giá trị biểu thức $Q = \frac{a + 2025b}{a + 2026b}$.

Câu 2. (1,5 điểm)

Hai bạn An và Bình, mỗi bạn chọn ngẫu nhiên một đỉnh của lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a .

a) Mô tả không gian mẫu và các kết quả thuận lợi của biến cố M : "Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh trùng nhau".

b) Tính xác suất của biến cố N : "Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh mà khoảng cách giữa chúng bằng $a\sqrt{3}$ ".

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{3}(x^2 - x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$.

b) Tại một Trường Trung học cơ sở A, khối lớp 8 có số học sinh nam gấp 3 lần số học sinh nữ; khối lớp 9 có số học sinh nam gấp 6 lần số học sinh nữ. Nếu tính chung cả hai khối thì tổng số học sinh là 750 và tổng số học sinh nam gấp 4 lần tổng số học sinh nữ. Hỏi khối lớp 8, khối lớp 9 ở Trường A, mỗi khối có bao nhiêu học sinh?

Câu 4. (1,5 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tất cả các số thực âm a để parabol $(P): y = x^2$ cắt đường thẳng $d_1: y = x - a$ tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 và cắt đường thẳng $d_2: y = 2x - 3a$ tại hai điểm có hoành độ x_3, x_4 thỏa mãn $\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_1 - x_4} + \frac{1}{x_2 - x_4} = \frac{1}{3}$.

b) Tồn tại hay không các số nguyên dương x, y sao cho giá trị biểu thức $\frac{x^2 + x - 2}{y^2 + 2y}$ là bình phương của một số nguyên tố? Vì sao?

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$), có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi P là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng BI .

a) Chứng minh rằng $2 \cdot \widehat{PIC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ và ba điểm P, E, F thẳng hàng.

b) Tia DI cắt các đường thẳng EF, PC lần lượt tại L, K . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, IK . Chứng minh rằng MN vuông góc với EF và $\frac{DI}{DN} + \frac{NL}{NI} = 1$.

Câu 6. (1,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Dựng hình bình hành $ABDC$. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) lấy điểm M sao cho tia DM nằm giữa tia DA và tia DC . Đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AC , cắt cạnh AB tại P và đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AB , cắt cạnh AC tại Q . Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ tại F (F khác A). Chứng minh rằng tam giác MBC đồng dạng tam giác PMA và AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF .

2 Lời giải

Lưu ý: Tác giả dùng dấu tương đương để rút gọn số dòng. Khi trình bày bài thi, bạn đọc hãy xuống dòng thay vì dùng dấu tương đương.

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}} - \frac{7\sqrt{ab} + 10b}{a + 4b + 5\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{a + 12b + 7\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$, với $a, b > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Khi P là số nguyên, tính giá trị biểu thức $Q = \frac{a + 2025b}{a + 2026b}$.

Lời giải:

a) Với $a, b > 0$:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}} - \frac{7\sqrt{ab} + 10b}{a + 4b + 5\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{a + 12b + 7\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + 2\sqrt{b})(\sqrt{a} + 4\sqrt{b}) + 3\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (7\sqrt{ab} + 10b)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + 4\sqrt{b})} \cdot \frac{(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(\sqrt{a} + 4\sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \\ &= \frac{(a + 4\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} + 8b + 3\sqrt{ab} + 3b - 7\sqrt{ab} - 10b)(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} \\ &= \frac{(a + 2\sqrt{ab} + b)(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} + 3\sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} = \frac{\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \end{aligned}$$

Vậy với $a, b > 0$ thì $P = \frac{\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

b) Ta có $P = 1 + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. Mặt khác, vì $a, b > 0$ nên $0 < \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = 2$, tức $1 < P < 3$. Lại có P nguyên nên:

$$P = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a} + 3\sqrt{b} = 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{b} = \sqrt{a} \Leftrightarrow b = a.$$

Khi đó

$$Q = \frac{a + 2025b}{a + 2026b} = \frac{a + 2025a}{a + 2026a} = \frac{2026a}{2027a} = \frac{2026}{2027}.$$

Vậy $Q = \frac{2026}{2027}$. □

Câu 2. (1,5 điểm) Hai bạn An và Bình, mỗi bạn chọn ngẫu nhiên một đỉnh của lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a .

- a) Mô tả không gian mẫu và các kết quả thuận lợi của biến cố M : "Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh trùng nhau".
- b) Tính xác suất của biến cố N : "Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh mà khoảng cách giữa chúng bằng $a\sqrt{3}$ ".

Lời giải:

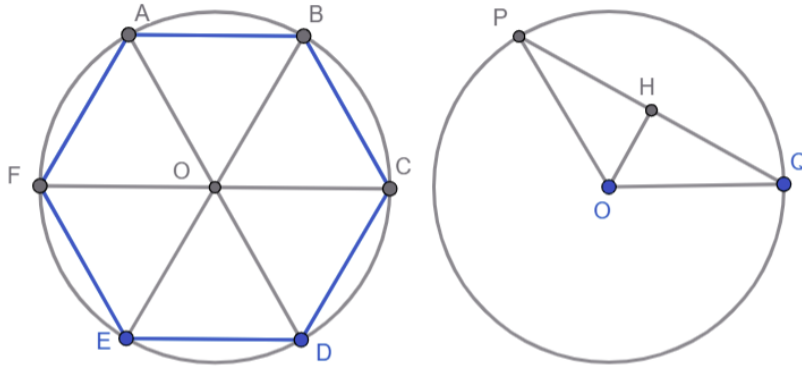
a) Ta viết kết quả của phép thử dưới dạng $(P; Q)$, trong đó An chọn đỉnh P , Bình chọn đỉnh Q . Không gian mẫu của phép thử là

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(P; Q) \mid P, Q \in \{A; B; C; D; E; F\}\} \\ &= \{(A; A); (A; B); (A; C); (A; D); (A; E); (A; F); (B; A); (B; B); (B; C); (B; D); (B; E); (B; F); \\ &\quad (C; A); (C; B); (C; C); (C; D); (C; E); (C; F); (D; A); (D; B); (D; C); (D; D); (D; E); (D; F); \\ &\quad (E; A); (E; B); (E; C); (E; D); (E; E); (E; F); (F; A); (F; B); (F; C); (F; D); (F; E); (F; F)\}.\end{aligned}$$

Ta có $n(\Omega) = 36$. Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố M :

$$(A; A); (B; B); (C; C); (D; D); (E; E); (F; F).$$

b)



Giả sử An chọn đỉnh P , Bình chọn đỉnh Q . Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp lục giác đều $ABCDEF$. Ta thấy $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOA} = 60^\circ$.

Thật vậy, theo định nghĩa đa giác đều, các cạnh của lục giác đều bằng nhau. Cụ thể, vì $AB = BC$ và $OA = OB = OC$ nên $\triangle OAB = \triangle OBC$ (c.c.c), suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$. Tương tự, ta chỉ ra được 6 góc trên bằng nhau. Vì 6 góc có tổng là 360° nên mỗi góc bằng 60° .

Khi đó, $\triangle OAB$ cân tại O có $\widehat{AOB} = 60^\circ$ nên $\triangle OAB$ đều, suy ra $OA = AB = a$.

Mặt khác, ta thấy $\widehat{POQ} = k \cdot 60^\circ$ với $k \in \{0; 1; 2; 3\}$. Ta sẽ chỉ ra $PQ = a\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $k = 2$.

Kẻ $OH \perp PQ$ tại H . Vì $OP = OQ$ nên O thuộc trung trực PQ , suy ra H là trung điểm PQ . Ta có

$$\begin{aligned}PQ = a\sqrt{3} &\Leftrightarrow PH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{PH}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (vì } OP = a) \Leftrightarrow \cos \widehat{OPQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \widehat{OPQ} = 30^\circ \Leftrightarrow (180^\circ - \widehat{POQ}) : 2 = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{POQ} = 120^\circ \Leftrightarrow 60k = 120 \Leftrightarrow k = 2.\end{aligned}$$

Các kết quả thuận lợi cho biến cố N :

$$(A; C); (B; D); (C; E); (D; F); (E; A); (F; B);$$

$$(C; A); (D; B); (E; C); (F; D); (A; E); (B; F).$$

Vì việc chọn đỉnh là ngẫu nhiên nên các kết quả có thể là đồng khả năng.

$$\text{Vậy xác suất của biến cố } N \text{ là } P(N) = \frac{n(N)}{n(\Omega)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

□

Câu 3. (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình $\sqrt{3}(x^2 - x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$.
- b) Tại một Trường Trung học cơ sở A, khối lớp 8 có số học sinh nam gấp 3 lần số học sinh nữ; khối lớp 9 có số học sinh nam gấp 6 lần số học sinh nữ. Nếu tính chung cả hai khối thì tổng số học sinh là 750 và tổng số học sinh nam gấp 4 lần tổng số học sinh nữ. Hỏi khối lớp 8, khối lớp 9 ở Trường A, mỗi khối có bao nhiêu học sinh?

Lời giải:

a) ĐKXD: $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{3}(x^2 - x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}(x^2 - x) \geq 0 \\ 3(x^2 - x)^2 = 3x^2 - 2x - 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 1) \geq 0 \\ 3x^2(x - 1)^2 = (x - 1)(3x + 1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ hoặc } x \geq 1 \text{ (1)} \\ (x - 1)[3x^2(x - 1) - 3x - 1] = 0 \text{ (2)} \end{cases} \end{aligned}$$

Xét (2), ta được $x = 1$ (thỏa (1)) hoặc:

$$3x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow 4x^3 = (x + 1)^3$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{4} = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1} \text{ (thỏa (1))}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{1; \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}\right\}$.

b) Gọi số học sinh nữ lớp 8, số học sinh nữ lớp 9 ở Trường A lần lượt là a, b thì số học sinh nam lớp 8, số học sinh nam lớp 9 ở Trường A lần lượt là $3a, 6b$. Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}^*$ (1).

Vì nếu tính chung cả hai khối thì tổng số học sinh là 750 nên $a + b + 3a + 6b = 750$, tức $4a + 7b = 750$ (2).

Vì tổng số học sinh nam gấp 4 lần tổng số học sinh nữ nên $3a + 6b = 4(a + b)$, tức $3a + 6b = 4a + 4b$, hay $2b = a$. Thay vào (2), ta được $4 \cdot 2b + 7b = 750$, hay $b = 50$.

Từ đó, $a = 2b = 100$. Ta có $(a; b) = (100; 50)$ thỏa (1).

Vậy khối lớp 8 Trường A có $3a + a = 4a = 400$ học sinh, khối lớp 9 Trường A có $750 - 400 = 350$ học sinh. $\square$

Câu 4. (1,5 điểm)

- a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tất cả các số thực âm a để parabol $(P): y = x^2$ cắt đường thẳng $d_1: y = x - a$ tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 và cắt đường thẳng $d_2: y = 2x - 3a$ tại hai điểm có hoành độ x_3, x_4 thỏa mãn $\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_1 - x_4} + \frac{1}{x_2 - x_4} = \frac{1}{3}$.
- b) Tồn tại hay không các số nguyên dương x, y sao cho giá trị biểu thức $\frac{x^2 + x - 2}{y^2 + 2y}$ là bình phương của một số nguyên tố? Vì sao?

Lời giải:

a) Giả sử tồn tại $a < 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 = x - a$, tức $x^2 - x + a = 0$, nên theo Định lý Viète,

$x_1 + x_2 = 1$ và $x_1x_2 = a$.

x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 = 2x - 3a$, tức $x^2 - 2x + 3a = 0$, nên theo Định lí Viète, $x_3 + x_4 = 2$ và $x_3x_4 = 3a$.

Ta có

$$\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3} = \frac{x_1 - x_3 + x_2 - x_3}{x_1x_2 - x_3(x_1 + x_2) + x_3^2} = \frac{1 - 2x_3}{a - x_3 + x_3^2} = \frac{1 - 2x_3}{a - x_3 + (2x_3 - 3a)} = \frac{1 - 2x_3}{x_3 - 2a}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{x_1 - x_4} + \frac{1}{x_2 - x_4} = \frac{1 - 2x_4}{x_4 - 2a}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_1 - x_4} + \frac{1}{x_2 - x_4} &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1 - 2x_3}{x_3 - 2a} + \frac{1 - 2x_4}{x_4 - 2a} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 3[(1 - 2x_3)(x_4 - 2a) + (1 - 2x_4)(x_3 - 2a)] &= (x_3 - 2a)(x_4 - 2a) \\ \Leftrightarrow 3[x_4 - 2a - 2x_3x_4 + 4ax_3 + x_3 - 2a - 2x_3x_4 + 4ax_4] &= (x_3 - 2a)(x_4 - 2a) \\ \Leftrightarrow 3[(4a + 1)(x_3 + x_4) - 4x_3x_4 - 4a] &= x_3x_4 - 2a(x_3 + x_4) + 4a^2 \\ \Leftrightarrow 3(8a + 2 - 12a - 4a) &= 3a - 4a + 4a^2 \\ \Leftrightarrow 4a^2 + 23a - 6 = 0 &\Leftrightarrow a \in \left\{ \frac{1}{4}; -6 \right\}. \end{aligned}$$

Vì $a < 0$ nên $a = -6$.

Ngược lại, với $a = -6$ thì $\{x_1; x_2\} = \{3; -2\}$, $\{x_3; x_4\} = \{1 + \sqrt{19}; 1 - \sqrt{19}\}$, do đó $x_1 - x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_4, x_2 - x_4$ khác 0.

Vậy $a = -6$.

b) Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y sao cho $\frac{x^2 + x - 2}{y^2 + 2y} = p^2$, với p là số nguyên tố.

Khi đó $(x - 1)(x + 2) = (y^2 + 2y)p^2$ (1), dẫn đến $(x - 1)(x + 2) : p^2$.

• Trường hợp 1: $x + 2 \not\vdots p$:

Khi đó $(x + 2; p^2) = 1$. Mà $(x - 1)(x + 2) : p^2$ nên $x - 1 : p^2$.

Đặt $x - 1 = kp^2$ với $k \in \mathbb{Z}$ ($k \geq 0$ vì $x - 1 \geq 0$).

Nếu $k = 0$ thì $x = 1$ và $p^2(y^2 + 2y) = 0$, vô lí do $p, y > 0$. Do đó, $k > 0$.

Xét (1), ta có $kp^2(kp^2 + 3) = (y^2 + 2y)p^2$, tức $k^2p^2 + 3k = y^2 + 2y$, hay $k^2p^2 + 3k + 1 = (y + 1)^2$. Điều này không xảy ra vì $(kp)^2 < k^2p^2 + 3k + 1 < (kp + 1)^2$. Thật vậy:

$$(k^2p^2 + 3k + 1) - (kp)^2 = 3k + 1 > 0;$$

$$(kp + 1)^2 - (k^2p^2 + 3k + 1) = k(2p - 3) > 0 \text{ (vì } k > 0 \text{ và } p \geq 2).$$

• Trường hợp 2: $x - 1 \not\vdots p$.

Khi đó $(x - 1; p^2) = 1$. Mà $(x - 1)(x + 2) : p^2$ nên $x + 2 : p^2$.

Đặt $x + 2 = kp^2$ với $k \in \mathbb{Z}$ ($k > 0$ vì $x + 2 > 0$).

Xét (1), ta có $kp^2(kp^2 - 3) = (y^2 + 2y)p^2$, tức $k^2p^2 - 3k = y^2 + 2y$, hay $k^2p^2 - 3k + 1 = (y + 1)^2$.

Điều này không xảy ra vì $(kp - 1)^2 < k^2p^2 - 3k + 1 < (kp)^2$. Thật vậy:

$$(k^2p^2 - 3k + 1) - (kp - 1)^2 = k(2p - 3) > 0 \text{ (vì } k > 0 \text{ và } p \geq 2);$$

$$(kp)^2 - (k^2p^2 - 3k + 1) = 3k - 1 > 0 \text{ (vì } k \geq 1).$$

- Trường hợp 3: $x + 2 \vdots p$ và $x - 1 \vdots p$:

Khi đó $(x + 2) - (x - 1) \vdots p$, tức $3 \vdots p$, hay $p = 3$. Do đó, $x = 3a + 1$ với $a \in \mathbb{N}$. (1) trở thành

$$3a(3a + 3) = 9(y^2 + 2y) \Leftrightarrow a^2 + a = y^2 + 2y \Leftrightarrow 4a^2 + 4a = 4y^2 + 8y$$

$$\Leftrightarrow (2a + 1)^2 - 1 = (2y + 2)^2 - 4 \Leftrightarrow [(2y + 2) - (2a + 1)][(2y + 2) + (2a + 1)] = 3.$$

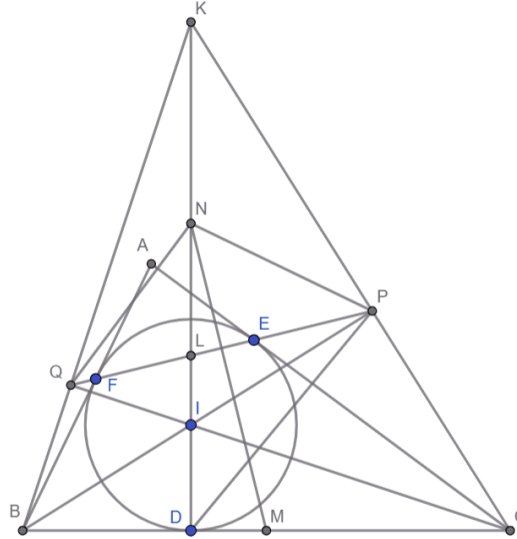
Vì $(2y + 2) + (2a + 1) > 0$ và $(2y + 2) + (2a + 1) > (2y + 2) - (2a + 1)$ nên $(2y + 2) - (2a + 1) = 1$ và $(2y + 2) + (2a + 1) = 3$. Khi đó $2(2y + 2) = 4$, tức $y = 0$, mâu thuẫn với $y > 0$.

Vậy giả sử là sai. Chứng minh hoàn tất. $\square$

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$), có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi P là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng BI .

- Chứng minh rằng $2 \cdot \widehat{PIC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ và ba điểm P, E, F thẳng hàng.
- Tia DI cắt các đường thẳng EF, PC lần lượt tại L, K . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, IK . Chứng minh rằng MN vuông góc với EF và $\frac{DI}{DN} + \frac{NL}{NI} = 1$.

Lời giải:



- Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, AI, BI, CI là các đường phân giác của ΔABC và $AF = AE$.

Ta có $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2}$. Thật vậy,

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} \right) = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Khi đó

$$2 \cdot \widehat{PIC} = 2 \left(180^\circ - \widehat{PIC} \right) = 360^\circ - 2 \left(90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} \right) = 180^\circ - \widehat{BAC}$$

nên $2 \cdot \widehat{PIC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

Vì $\widehat{IEC} = \widehat{IPC} = \widehat{IDC} = 90^\circ$ nên I, D, C, P, E cùng thuộc đường tròn đường kính IC . Vì ΔAFE cân tại A (do $AF = AE$) nên $2\widehat{AEF} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 2\widehat{PIC}$, suy ra

$$\widehat{AEF} = \widehat{PIC} = \widehat{PEC} = 180^\circ - \widehat{AEP}.$$

Do đó, P, E, F thẳng hàng.

b) **Cách 1:** *Vẽ thêm*

Gọi Q là hình chiếu của B trên CI . Tương tự câu a, ta chứng minh được Q, F, E thẳng hàng. $\triangle KCB$ có hai đường cao BP, KD cắt nhau tại I nên $CI \perp BK$. Mà $CI \perp BQ$ nên B, Q, K thẳng hàng. (Bài toán trở về mô hình trực tâm: $\triangle KCB$ có ba đường cao KD, BP, CQ đồng quy tại I .)

Tứ giác $AQIP$ có $\widehat{AQI} = \widehat{API} = 90^\circ$ nên nội tiếp đường tròn tâm N đường kính KI , suy ra N thuộc trung trực PQ .

Tứ giác $BQPC$ có $\widehat{BQC} = \widehat{BPC} = 90^\circ$ nên nội tiếp đường tròn tâm M đường kính BC , suy ra M thuộc trung trực PQ .

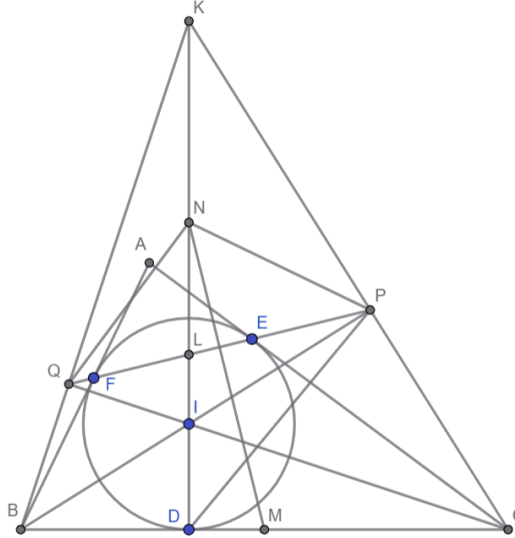
Từ đó, MN là trung trực PQ nên $MN \perp PQ$, tức $MN \perp EF$.

Ta cần chứng minh $\frac{NL}{NI} = 1 - \frac{DI}{DN} = \frac{NI}{DN}$, tức $NI^2 = ND \cdot NL$, hay $NP^2 = ND \cdot NL$.

Ta có

$$\widehat{QPN} = \frac{180^\circ - \widehat{QNP}}{2} = \frac{180^\circ - 2\widehat{QKP}}{2} = 90^\circ - \widehat{QKP} = \widehat{QCP} = \widehat{IDP}.$$

Do đó, $\triangle NPL \sim \triangle NDP$ (g.g) nên $\frac{NP}{ND} = \frac{NL}{NP}$, tức $NP^2 = ND \cdot NL$. Chứng minh hoàn tất.



Cách 2: *Không vẽ thêm*

Vì N là trung điểm KI và $\widehat{KPI} = 90^\circ$ nên $NK = NP = NI$.

Vì M là trung điểm BC và $\widehat{BPC} = 90^\circ$ nên $MB = MP = MC$.

Ta có $\widehat{NPM} = 90^\circ$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} \widehat{NPM} &= \widehat{NPI} + \widehat{MPI} = \widehat{NIP} + \widehat{MBP} \text{ (do } \triangle NPI \text{ cân tại } N, \triangle MBP \text{ cân tại } M) \\ &= \widehat{BID} + \widehat{MBP} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Mà $\widehat{NDM} = 90^\circ$ nên tứ giác $NDMP$ nội tiếp đường tròn đường kính NM .

Ta có

$$\widehat{NPL} = \widehat{NPI} - \widehat{EPI} = \widehat{NIP} - \widehat{ECI} = \widehat{DCP} - \widehat{DCI} = \widehat{ICP} = \widehat{IDP} = \widehat{NMP} = 90^\circ - \widehat{MNP}.$$

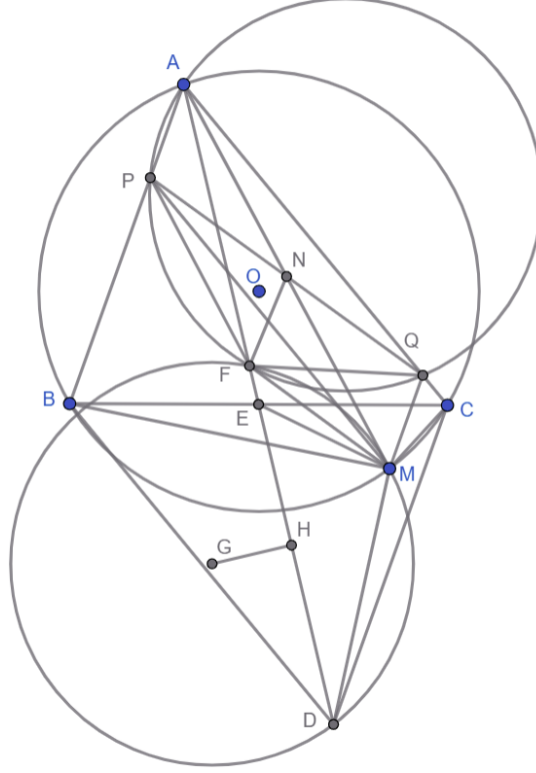
Suy ra $MN \perp EF$.

Ta cần chứng minh $\frac{NL}{NI} = 1 - \frac{DI}{DN} = \frac{NI}{DN}$, tức $NI^2 = ND \cdot NL$, hay $NP^2 = ND \cdot NL$.

MN cắt EF tại K . Khi đó $\frac{NK}{NL} = \frac{ND}{NM}$ (cùng bằng $\cos \widehat{DNM}$) và $\frac{NK}{NP} = \frac{NP}{NM}$ (cùng bằng $\cos \widehat{MNP}$) nên $NL \cdot ND = NK \cdot NM = NP^2$. $\square$

Câu 6. (1,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Dựng hình bình hành $ABDC$. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) lấy điểm M sao cho tia DM nằm giữa tia DA và tia DC . Đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AC , cắt cạnh AB tại P và đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AB , cắt cạnh AC tại Q . Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ tại F (F khác A). Chứng minh rằng tam giác MBC đồng dạng tam giác PMA và AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF .

Lời giải:



$\widehat{MCB} = \widehat{MAB} = \widehat{PAM}$ và $\widehat{MBC} = \widehat{MAC} = \widehat{PMA}$ (vì $MP \parallel AC$) nên $\triangle MBC \sim \triangle PMA$ (g.g).
 Vì $ABDC$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$ và AD cắt BC tại trung điểm E mỗi đường.
 Vì $MP \parallel AC$ và $MQ \parallel AB$ nên $APMQ$ là hình bình hành, suy ra PQ cắt AM tại trung điểm N mỗi đường.

Ta có $\widehat{PQF} = \widehat{PAF} = \widehat{ADC}$ (vì $AB \parallel DC$) và $\widehat{FPQ} = \widehat{FAQ}$ nên $\triangle DAC \sim \triangle QPF$ (g.g). Khi đó $\widehat{AEC} = \widehat{PNF}$. Thật vậy,

$$\frac{EA}{NP} = \frac{2EA}{2NP} = \frac{DA}{QP} = \frac{AC}{PF} \text{ (do } \triangle DAC \sim \triangle QPF \text{)}.$$

Mà $\widehat{DAC} = \widehat{QPF}$ nên $\triangle EAC \sim \triangle NPF$ (c.g.c), suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{PNF}$.

Tương tự, vì $\triangle MBC \sim \triangle PMA$ nên $\widehat{MEC} = \widehat{PNA}$. Mà $\widehat{AEC} = \widehat{PNF}$ nên $\widehat{AEM} = \widehat{ANF}$, dẫn đến $\triangle AFN \sim \triangle AME$ (g.g). Do đó:

$$\frac{AF}{AM} = \frac{AN}{AE} \Leftrightarrow AF \cdot AE = AN \cdot AM \Leftrightarrow AF \cdot \frac{AD}{2} = \frac{AM}{2} \cdot AM \Leftrightarrow AF \cdot AD = AM^2.$$

Ta có điều phải chứng minh. Thật vậy, gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MDF$. Vì G thuộc trung trực FD nên với H là trung điểm FD thì $GH \perp AD$. Ta có

$$\begin{aligned} AF \cdot AD &= (AH - HF)(AH + HD) = AH^2 - HD^2 \\ &= (AG^2 - GH^2) - (GD^2 - GH^2) = AG^2 - DG^2 = AG^2 - GM^2. \end{aligned}$$

Như vậy, $AM^2 = AG^2 - GM^2$ nên theo định lý Pythagore đảo, $\triangle AMG$ vuông tại M . Chứng minh hoàn tất. $\square$