

Câu 1. (2,0 điểm): Cho biểu thức $A = \frac{2x - \sqrt{x} + 2}{x - 4} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

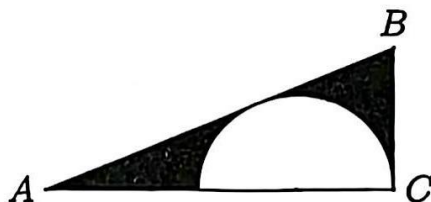
a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x sao cho $A > 1$.

Câu 2. (1,0 điểm): Giải phương trình $\frac{5x}{\sqrt{5x+1}-1} = x+2$.

Câu 3. (1,0 điểm): Cho đa thức $f(x)$ có hệ số thực. Biết khi chia $f(x)$ cho $x-4$ có dư là 10 và khi chia $f(x)$ cho $x-5$ có dư là 8. Khi chia $f(x)$ cho $(x-4)(x-5)$ được thương là $g(x)$ và có dư là $r(x)$. Tìm $r(x)$.

Câu 4. (1,0 điểm): Cho tam giác ABC vuông tại C có $AB = 13 \text{ cm}, BC = 5 \text{ cm}$. Một nửa đường tròn có đường kính nằm trên cạnh AC , tiếp xúc với BC tại C và tiếp xúc với AB (tham khảo hình bên). Tính diện tích phần tô đậm trong hình.



Câu 5. (2,5 điểm): Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $BC = 6 \text{ cm}$. Gọi H là điểm nằm trên đoạn thẳng OB (H không trùng với O và B). Đường thẳng vuông góc với BC tại H cắt nửa đường tròn đã cho tại A . Gọi G là trung điểm của AC .

a) Chứng minh rằng A, G, O, H cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

b) Gọi D là điểm nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $HD = HA$. Đường thẳng DH cắt các đường thẳng AB, AO lần lượt tại E, I . Gọi K là giao điểm AH và EC , F là giao điểm AO và BD . Chứng minh rằng: $AE^2 = 2.EI.HD$ và tam giác AKE đồng dạng với tam giác AFD .

c) Gọi $BH = x$. Tìm x để diện tích của tứ giác $ABKC$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6. (1,0 điểm): Cho số nguyên tố $p > 5$. Chứng minh rằng $A = 6^p - 5^p - 1$ chia hết cho $5p$.

Câu 7. (1,0 điểm): Bên trong một đường tròn có bán kính bằng 11, cho 7 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất 2 điểm trong 7 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 11.

Câu 8. (0,5 điểm): Cho ba số thực dương x, y, z thỏa $x.y.z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+y)(1+z)}.$$

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

LỜI GIẢI THAM KHẢO BÀI THI MÔN TOÁN CHUYÊN

Thực hiện. Nguyễn Đăng Hữu Thịnh¹, Nguyễn Minh Duy², Phạm Nguyễn Anh Duy³, Nguyễn Đăng Khoa⁴, Nguyễn Thị Kim Cúc⁵, Giảng Hồng Ngọc⁶

Mặc dù đã cố gắng hết sức, nhưng do thời gian hạn chế nên khó tránh sai sót. Nhóm tác giả mong nhận được nhiều phản hồi từ bạn đọc để lời giải được hoàn thiện hơn nữa qua địa chỉ mail clbctgpimc@gmail.com.

Câu 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức $A = \frac{2x - \sqrt{x} + 2}{x - 4} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x sao cho $A > 1$.

Lời giải.

a) Với điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$ thì:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x - \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \\ &= \frac{2x - \sqrt{x} + 2 + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{2x - \sqrt{x} + 2 + x - \sqrt{x} - 2 - x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{2x - 4\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}. \end{aligned}$$

b) $A > 1$ khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} &> 1 \\ 2\sqrt{x} &> \sqrt{x} + 2 \\ \sqrt{x} &> 2 \\ x &> 4. \end{aligned}$$

¹Cựu học sinh chuyên Toán, niên khóa 2020-2023, trường THPT Chuyên Tiền Giang

²Học sinh lớp 12 Toán 1, trường THPT Chuyên Tiền Giang

³Học sinh lớp 11 Toán 1, trường THPT Chuyên Tiền Giang

⁴Học sinh lớp 11 Toán 1, trường THPT Chuyên Tiền Giang

⁵Học sinh lớp 10 Toán 1, trường THPT Chuyên Tiền Giang

⁶Học sinh lớp 10 Sinh, trường THPT Chuyên Tiền Giang

Kết hợp với điều kiện xác định thì $A > 1$ khi và chỉ khi $\boxed{x > 4}$.

 **Câu 2 (1,0 điểm).** Giải phương trình $\frac{5x}{\sqrt{5x+1}-1} = x+2$.

 **Lời giải.**

Điều kiện xác định của phương trình này là $x \geq -\frac{1}{5}, x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{5x+1}-1)(\sqrt{5x+1}+1)}{\sqrt{5x+1}-1} &= x+2 \\ \sqrt{5x+1}+1 &= x+2 \\ \sqrt{5x+1} &= x+1 \\ 5x+1 &= (x+1)^2 \\ 5x+1 &= x^2+2x+1 \\ x^2-3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 0$ (không thỏa mãn $x \neq 0$) và $x = 3$ (thỏa mãn). Vậy phương trình trên có nghiệm duy nhất là $\boxed{x = 3}$.

 **Câu 3 (1,0 điểm).** Cho đa thức $f(x)$ có hệ số thực. Biết khi chia $f(x)$ cho $x-4$ có dư là 10 và khi chia $f(x)$ cho $x-5$ có dư là 8. Khi chia $f(x)$ cho $(x-4)(x-5)$ được thương là $g(x)$ và có dư là $r(x)$. Tìm $r(x)$.

 **Lời giải.**

Ta có:

☑ $f(x) = (x-4)(x-5)g(x) + r(x)$ (vì $(x-4)(x-5)$ được thương là $g(x)$ và có dư là $r(x)$.)

Nhận xét 1 : $r(x)=ax+b$

☑ Vì chia $f(x)$ cho $x-4$ có dư là 10 nên $r(4) = 10$

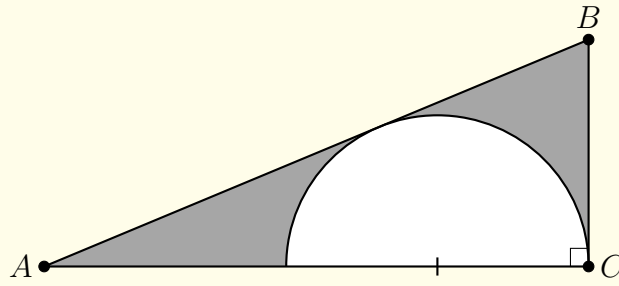
☑ Vì chia $f(x)$ cho $x-5$ có dư là 8 nên $r(5) = 8$

Khi đó ta có hệ phương trình sau:

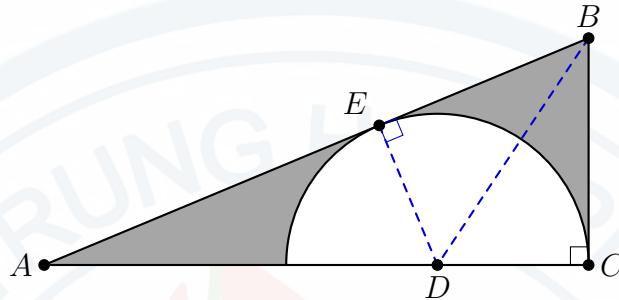
$$\begin{cases} 4a+b=10 \\ 5a+b=8 \end{cases} \Rightarrow a=-2; b=18$$

Vậy đa thức dư cần tìm là $\boxed{r(x)=-2x+18}$.

 **Câu 4 (1,0 điểm).** Cho tam giác ABC vuông tại C có $AB = 13$ cm, $BC = 5$ cm. Một đường tròn có đường kính nằm trên cạnh AC , tiếp xúc với BC tại C và tiếp xúc với AB (tham khảo hình bên). Tính diện tích phần tô đậm trong hình.



 **Lời giải.**



Xét tam giác ABC vuông tại C thì $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm. Gọi D là tâm đường tròn này và gọi E là tiếp điểm của đường tròn này với cạnh AB .

Xét hai tam giác BDC và BDE có

$$\begin{cases} \widehat{BCD} = \widehat{BED} = 90^\circ \\ BD \text{ là cạnh chung} \\ DC = DE \end{cases}$$

suy ra $\triangle BDC \sim \triangle BDE$, do đó $\widehat{DBC} = \widehat{DBE}$. Ta suy ra BD là tia phân giác của $\widehat{ABC}$.

Khi đó $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{AD + DC}{AB + BC} = \frac{AC}{AB + BC} = \frac{12}{5 + 13} = \frac{2}{3}$, suy ra bán kính của đường tròn bằng

$$DC = BC \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ cm.}$$

Ta tính được

$$\text{☛ Diện tích tam giác } ABC \text{ là } \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 \text{ cm}^2,$$

$$\text{☛ Diện tích nửa hình tròn bằng } \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot DC^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{50}{9} \pi \text{ cm}^2,$$

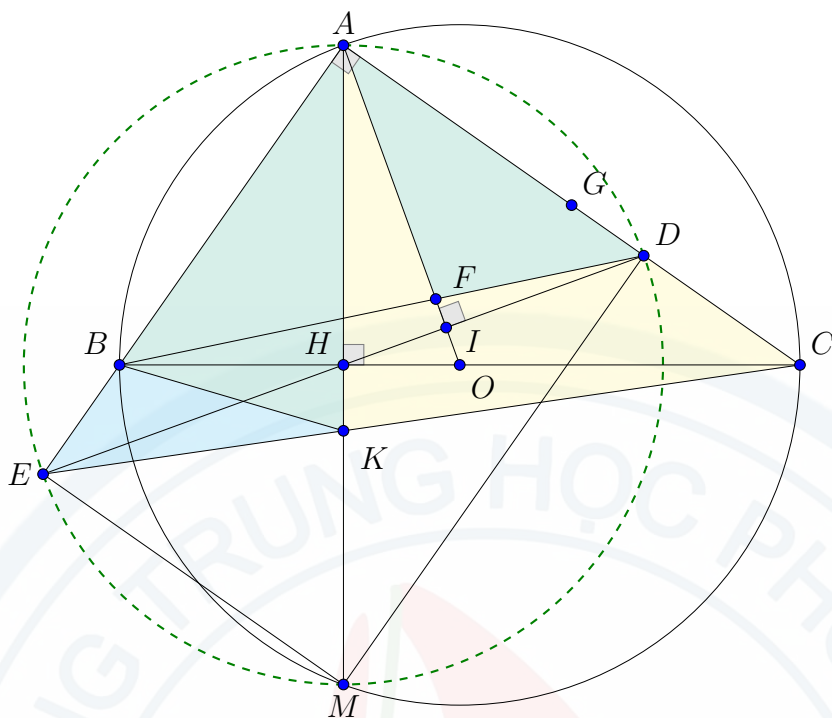
Vậy diện tích phần tô đậm bằng $\boxed{30 - \frac{50}{9} \pi \text{ cm}^2}.$

🌸 Câu 5 (2,5 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $BC = 6$ cm. Gọi H là điểm nằm trên đoạn thẳng OB (H không trùng với O và B). Đường thẳng vuông góc với BC tại H cắt nửa đường tròn đã cho tại A . Gọi G là trung điểm của AC .

a) Chứng minh rằng A, G, O, H cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

b) Gọi D là điểm nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $HD = HA$. Đường thẳng DH cắt các đường thẳng AB, AO lần lượt tại E, I . Gọi K là giao điểm của AH và EC , F là giao điểm của AO và BD . Chứng minh rằng $AE^2 = 2 \cdot EI \cdot HD$ và tam giác AKE đồng dạng với tam giác AFD .

c) Gọi $BH = x$. Tìm x để diện tích tứ giác $ABKC$ đạt giá trị lớn nhất.



 Lời giải.

- a) Xét nửa đường tròn tâm O có G là trung điểm của AC , suy ra $\widehat{AGO} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{AHO} = \widehat{AGO} = 90^\circ$, suy ra bốn điểm A, G, O, H cùng thuộc đường tròn đường kính AO , và do đó tâm của đường tròn này là trung điểm của AO .

- b) Bằng việc biến đổi góc, ta có $\widehat{OAD} + \widehat{ADH} = \widehat{OCA} + \widehat{HAC} = 90^\circ$, suy ra AO vuông góc với ED tại I .

Xét tam giác AED vuông tại A có $H \in ED$, $HA = HD$; suy ra H là trung điểm của ED .

Do đó, kết hợp với việc AI là đường cao của tam giác AED thì $AE^2 = EI \cdot ED = 2 \cdot EI \cdot HD$.

Xét tứ giác $BEDC$ có $\widehat{ADE} = 90^\circ - \widehat{OAC} = 90^\circ - \widehat{BCA} = \widehat{ABC}$ nên tứ giác $BDEC$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tam giác AKE và tam giác AFD có

$$\begin{cases} \widehat{AEK} = \widehat{ADF} & (\text{do tứ giác BDEC là tứ giác nội tiếp}) \\ \widehat{FAD} = \widehat{OCA} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{EAK} \end{cases}$$

Suy ra $\triangle AKE \sim \triangle AFD$ (g - g).

- c) Đặt $BH = x$. Gọi $M = (ABC) \cap (ADE)$, suy ra $AEMD$ là hình chữ nhật. Khi đó, $ME \parallel AC$.
Do đó,

$$\frac{KM}{KA} = \frac{ME}{AC} = \frac{AD}{AC} = \frac{2AH \cdot \cos \widehat{CAH}}{AC} = \frac{2AH^2}{AC^2}.$$

Mặt khác,

$$\frac{2.AH^2}{AC^2} = \frac{2.BH.CH}{6.CH} = \frac{BH}{3} = \frac{x}{3}.$$

Do AK là trục đẳng phương của hai đường tròn (ABC) và (ADE) nên

$$\frac{x.KA^2}{3} = KM.KA = OA^2 - OK^2. \quad (1)$$



Hơn nữa,

$$OA^2 - OK^2 = OA^2 - (OA^2 + KA^2 - 2OA.KA.\cos \widehat{OAK}) = 2KA.AH - KA^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AK = \frac{6.AH}{x+3} = \frac{6\sqrt{HB.HC}}{x+3} = \frac{6\sqrt{x(6-x)}}{x+3}.$$

Trở lại bài toán, ta có

$$S_{ABKC} = \frac{AK.BC}{2} = \frac{18\sqrt{x(6-x)}}{x+3} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{18[(6-x)+3x]}{2\sqrt{3}(x+3)} = 3\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $6-x=3x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Khi đó $x=BH=\frac{3}{2}$ hay tứ giác $ABKC$ có diện tích lớn nhất khi B là trung điểm của OH .

 **Câu 6 (1,0 điểm).** Cho số nguyên tố $p > 5$. Chứng minh rằng $A = 6^p - 5^p - 1$ chia hết cho $5p$

 **Lời giải.**

Vì $p > 5$ nên $(6, p) = (5, p) = 1$. Theo định lý Fermat nhỏ, ta có:

$$\textcircled{✓} 6^p \equiv 6 \equiv 5^p + 1 \pmod{p},$$

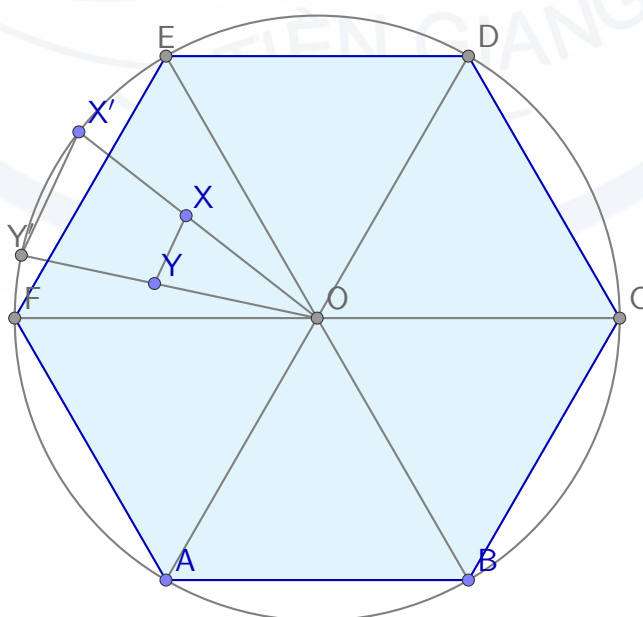
$$\textcircled{✓} 6^p \equiv 1 \equiv 5^p + 1 \pmod{5},$$

nên $5, p \mid A = 6^p - 5^p - 1$, mà $\gcd(5, p) = 1$ nên $A = 6^p - 5^p - 1$ chia hết cho $5p$.

 **Câu 7 (1,0 điểm).** Bên trong một đường tròn có bán kính bằng 11, cho 7 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất 2 trong 7 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 11.

 **Lời giải.**

Đầu tiên, ta chia hình tròn thành 6 phần bằng nhau như hình vẽ sau:



Theo nguyên lý Dirichlet, có tổng cộng 7 điểm nằm trong đường tròn được chia vào 6 phần, nên tồn tại một phần chứa ít nhất 2 điểm nằm trong nó.

Xét 2 điểm X, Y nằm trong cùng 1 phần, ta chứng minh rằng khoảng cách giữa 2 điểm đó luôn nhỏ hơn 11. Thật vậy:

Gọi X', Y' lần lượt là giao điểm của OX, OY với đường tròn (O).

Ta biến đổi góc như sau: $\widehat{OXY} + \widehat{OYX} = 180^\circ - \widehat{XOY} \geq 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Điều này dẫn đến: $\max\{\widehat{OXY}; \widehat{OYX}\} \geq \frac{1}{2}(\widehat{OXY} + \widehat{OYX}) = 60^\circ \geq \widehat{XOY}$.

Hay: $11 = OX' = OY' > \max\{OX; OY\} \geq XY$.

(Lý giải: do 1 trong 2 góc $\widehat{OXY}$ và $\widehat{OYX}$ lớn hơn hoặc bằng 60° nên lớn hơn hoặc bằng $\widehat{XOY}$, do đó ta suy ra được $OX \geq XY$ hoặc $OY \geq XY$.)

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

 **Câu 8 (0,5 điểm).** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)}$$

 **Lời giải.**

Do đề bài có sự nhầm lẫn ở phân thức cuối cùng nên chúng mình đã chỉnh sửa lại để có được lời giải chính chu nhất.

***Lời giải thứ nhất:**

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{x^4}{1+x+xy+xz} + \frac{y^4}{1+y+yz+xy} + \frac{z^4}{1+z+xz+yz} \\ &\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3+x+y+z+2xy+2yz+2xz} = B \end{aligned}$$

Ta chứng minh:

$$B \geq \frac{3}{4}$$

$$4(x^2+y^2+z^2)^2 \geq 3(3+x+y+z+2xy+2yz+2xz)$$

$$4x^4+4y^4+4z^4+8x^2y^2+8y^2z^2+8x^2z^2 \geq 9+3x+3y+3z+6xy+6yz+6xz(*)$$

Ta xét các bất đẳng thức sau:

$$\textcircled{\bullet} 3(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+3) \geq 6(xy+yz+xz).$$

$$\textcircled{\bullet} 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \geq 3(x^2yz+xy^2z+xyz^2) = 3xyz(x+y+z) = 3(x+y+z).$$

$$\textcircled{\bullet} 2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2) \geq 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{x^2y^2 \cdot y^2z^2 \cdot x^2z^2} = 6,$$

$$\textcircled{\bullet} 4x^4+4y^4+4z^4 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{4x^4 \cdot 4y^4 \cdot 4z^4} = 12.$$

Từ các bất đẳng thức trên, ta cộng vế theo vế suy ra (*) đúng.

Vậy $\min P = \frac{3}{4}$ khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

***Lời giải thứ hai:**

Đặt $[P = \frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y^3}{(z+1)(x+1)} + \frac{z^3}{(x+1)(y+1)},]$ với $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương $\left[\frac{x^3}{(y+1)(z+1)}, \frac{y+1}{8}, \frac{z+1}{8} \right]$

Ta có: $\frac{x^3}{(y+1)(z+1)} + \frac{y+1}{8} + \frac{z+1}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{(y+1)(z+1)} \cdot \frac{y+1}{8} \cdot \frac{z+1}{8}} = 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{64}} = \frac{3x}{4}.$

Suy ra $\frac{x^3}{(y+1)(z+1)} \geq \frac{3x}{4} - \frac{y+z+2}{8}.$

Tương tự, ta có:

$$\textcircled{\bullet} \frac{y^3}{(z+1)(x+1)} \geq \frac{3y}{4} - \frac{z+x+2}{8},$$

$$\textcircled{\bullet} \frac{z^3}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{3z}{4} - \frac{x+y+2}{8}.$$

Cộng (1), (2) và (3), ta được:

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{3}{4}(x+y+z) - \frac{1}{8}[(y+z+2) + (z+x+2) + (x+y+2)] \\ &= \frac{3}{4}(x+y+z) - \frac{1}{8}(2(x+y+z) + 6) \\ &= \frac{x+y+z}{2} - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Mặt khác, do $xyz = 1$ nên theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3.$

Vì thế: $P \geq \frac{x+y+z}{2} - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$

Vậy $\boxed{\min P = \frac{3}{4}}.$ Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1.$

