

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,0 điểm)

1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh

$$\frac{1}{3x + yz} + \frac{1}{3y + xz} + \frac{1}{3z + xy} = \frac{6}{(x + y)(y + z)(z + x)}.$$

2. Xét đa thức $P(x) = x^3 - mx + 1$, với m là một số thực. Giả sử đa thức $P(x)$ có ba nghiệm thực là a, b, c .

a) Chứng minh $abc = -1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để $a^6 + b^6 + c^6 = 19$.

Bài 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^3(y^2 + 1) + \sqrt{2x} - 2 = 0 \\ 2x^2y(1 + \sqrt{y^2 + 3}) = x + \sqrt{3x^2 + \frac{1}{4}}. \end{cases}$$

2. Một đoàn thiện nguyện dự định chở 48 tấn hàng để hưởng ứng phong trào “Hương về Miền Trung thân yêu”. Khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa tăng thêm 7 tấn so với dự định, do đó đoàn thiện nguyện phải bổ sung thêm 3 xe, lúc này mỗi xe chở ít hơn dự định 1 tấn hàng. Hỏi ban đầu, đoàn thiện nguyện dự định dùng bao nhiêu chiếc xe để chở hàng, biết các xe chở số tấn hàng bằng nhau?

Bài 3. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . Lấy điểm H nằm trên đoạn thẳng OC (H không trùng với O và C). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với đường thẳng BC cắt đường thẳng AC tại E và cắt đường thẳng AB tại F . Gọi D là giao điểm của đường thẳng BE với đường tròn $(O; R)$ (D không trùng với B). Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC . Tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ cắt đường thẳng EF tại G .

1. Chứng minh ba điểm F, D, C thẳng hàng và tam giác FAD đồng dạng với tam giác FCB .

2. Chứng minh G là trung điểm của EF và tìm vị trí của điểm H trên đoạn thẳng OC sao cho $OI + 4OH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3. Đường thẳng qua B song song với đường thẳng FC cắt đường thẳng CA tại S . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng FH và AD . Chứng minh đường thẳng OS song song với đường thẳng CK .

Bài 4. (1,5 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp $(x; y)$ nguyên dương thỏa mãn $x^2 - 2y^2 + 2x - y - xy = 21$.

2. Cho 2026 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$. Chứng minh tồn tại hai số nguyên dương x, y thỏa mãn $y > 1$ và $xy + a_i$ chia hết cho $x + a_i$ với mọi số nguyên dương i từ 1 đến 2026.

Bài 5. (0,75 điểm) Xét a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.

1. Chứng minh $a + b + c \geq 3$.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(2a+b+c)^3}{b+c} + \frac{(2b+c+a)^3}{c+a} + \frac{(2c+a+b)^3}{a+b}$.

Bài 6. (0,75 điểm) Có 8 “chú” mèo, mỗi “chú” được đặt tên là một dãy ký tự thuộc vào tập hợp $\{000; 001; 010; 011; 100; 101; 110; 111\}$ sao cho không có hai “chú” mèo nào trùng tên. Hai “chú” mèo gọi là “liên kết” với nhau nếu trong dãy ký tự tên của chúng, có đúng một vị trí, mà hai ký tự tương ứng khác nhau (ví dụ: hai “chú” mèo 000 và 001 được gọi là liên kết với nhau, nhưng hai “chú” mèo 000 và 011 thì không được gọi là liên kết với nhau). Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất, sao cho trong k “chú” mèo phân biệt được chọn tùy ý từ 8 “chú” mèo trên, tồn tại 3 “chú” mèo mà một “chú” liên kết với hai “chú” kia.

----- HẾT -----

CHUYÊN TOÁN NINH BÌNH 2026

Bài tập 1 (Lim Olympic - Ninh Bình - Bài 1)

- ① Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3x + yz} + \frac{1}{3y + zx} + \frac{1}{3z + xy} = \frac{6}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

- ② Xét đa thức $P(x) = x^3 - mx + 1$, với m là một số thực. Giả sử đa thức $P(x)$ có ba nghiệm thực là a, b, c .
- a) Chứng minh $abc = -1$.
- b) Tìm tất cả các giá trị của m để $a^6 + b^6 + c^6 = 19$.

Lời giải.

- ① Để ý $3x + yz = (x + y + z)x + yz = (x + y)(x + z)$.

$$\text{Thay vào có được } VT = \frac{2x + 2y + 2z}{(x + y)(y + z)(z + x)} = \frac{6}{(x + y)(y + z)(z + x)} = VP.$$

- ② $P(x) = x^3 - mx + 1 = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$.

a) Bằng đồng nhất hệ số ta có được $1 = -abc$ hay $abc = -1$.

b) $a^3 = ma - 1$ nên $a^6 = (ma - 1)^2 = m^2a^2 - 2ma + 1$.

$$\text{Tương tự có } a^6 + b^6 + c^6 = m^2(a^2 + b^2 + c^2) - 2m(a + b + c) + 3.$$

$$\text{Ngoài ra ta có } a + b + c = 0 \text{ và } ab + bc + ca = -m.$$

$$\text{Do đó } a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 2m.$$

$$\text{Từ đó } a^6 + b^6 + c^6 = m^2(2m) - 2m(0) + 3 = 2m^3 + 3.$$

$$\text{Từ giả thiết có } 2m^3 + 3 = 19 \text{ nên } m = 2, \text{ thử lại thấy thỏa mãn.}$$

Bài tập 2 (Lim Olympic - Ninh Bình - Bài 2)

- ① Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^3(y^2 + 1) + \sqrt{2x} - 2 = 0 \\ 2x^2y(1 + \sqrt{y^2 + 3}) = x + \sqrt{3x^2 + \frac{1}{4}} \end{cases}$$

- ② Một đoàn thiện nguyện dự định chở 48 tấn hàng để hưởng ứng phong trào "Hướng về Miền Trung thân yêu". Khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa tăng thêm 7 tấn so với dự định, do đó đoàn thiện nguyện phải bổ sung thêm 3 xe, lúc này mỗi xe chở ít hơn dự định 1 tấn hàng. Hỏi ban đầu, đoàn thiện nguyện dự định dùng bao nhiêu chiếc xe để chở hàng, biết các xe chở số tấn hàng bằng nhau?

① Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

Để thấy $x = 0$ không thỏa mãn đề nên $x > 0$.

Từ $2x^2y(1 + \sqrt{y^2 + 3}) = x + \sqrt{3x^2 + \frac{1}{4}}$ ta suy ra được $y > 0$ do $x > 0$.

Chia 2 vế của phương trình thứ hai cho x^2 ta được $2y(1 + \sqrt{y^2 + 3}) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{3}{x^2} + \frac{1}{4x^4}}$.

Đặt $\frac{1}{2x} = t > 0$ ta được phương trình $2y(1 + \sqrt{y^2 + 3}) = 2t(1 + \sqrt{t^2 + 3})$

hay $2y + 2y\sqrt{y^2 + 3} = 2t + 2t\sqrt{t^2 + 3}$.

◇ Với $y > t > 0$ thì $2y + 2y\sqrt{y^2 + 3} > 2t + 2t\sqrt{t^2 + 3}$ (Vô lí).

◇ Với $0 < y < t$ thì $2y + 2y\sqrt{y^2 + 3} < 2t + 2t\sqrt{t^2 + 3}$ (Vô lí).

Vậy $y = t \Rightarrow 2xy = 1$, thay $y = \frac{1}{2x}$ vào phương trình đầu ta được

$$4x^3\left(\frac{1}{4x^2} + 1\right) + \sqrt{2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x + 4x^3 + \sqrt{2x} = 2 \quad (*)$$

◇ Nếu $x > \frac{1}{2}$ thì VT (*) $> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$ nên vô lí.

◇ Nếu $0 < x < \frac{1}{2}$ thì VT (*) $< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$ nên vô lí.

◇ Nếu $x = \frac{1}{2}$ thì thỏa mãn phương trình nên $y = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}, y = 1$.

② Gọi số xe ban đầu đoàn dự định dùng là x chiếc ($x \in \mathbb{N}^*$).

Do đó, lượng hàng dự định mỗi xe phải chở là: $\frac{48}{x}$ (tấn hàng/xẻ).

Thực tế, số hàng hóa là $48 + 7 = 55$ (tấn).

Số xe thực tế là: $x + 3$ (chiếc).

Lượng hàng thực tế mỗi xe chở là: $\frac{55}{x+3}$ (tấn hàng/xẻ).

Theo đề bài, mỗi xe thực tế chở ít hơn dự định 1 tấn hàng, ta có phương trình:

$$\frac{48}{x} - \frac{55}{x+3} = 1$$

Quy đồng mẫu thức với điều kiện $x > 0$:

$$48(x+3) - 55x = x(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 48x + 144 - 55x = x^2 + 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 144 = 0$$

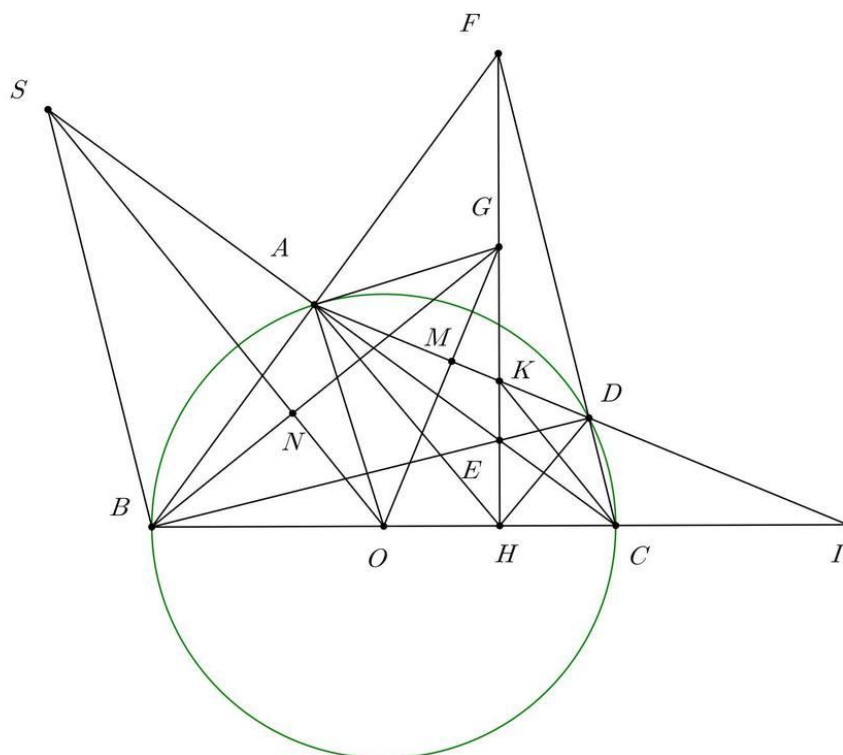
$$\Leftrightarrow (x-8)(x+18) = 0$$

Vì $x > 0$ nên $x = 8$. Vậy ban đầu đoàn thiện nguyện dự định dùng 8 chiếc xe.

Bài tập 3 (Lim Olympic - Ninh Bình - Bài 3)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . Lấy điểm H nằm trên đoạn thẳng OC (H không trùng với O và C). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với đường thẳng BC cắt đường thẳng AC tại E và cắt đường thẳng AB tại F . Gọi D là giao điểm của đường thẳng BE với đường tròn $(O; R)$ (D không trùng với B). Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC . Tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ cắt đường thẳng EF tại G .

- ① Chứng minh ba điểm F, D, C thẳng hàng và tam giác FAD đồng dạng với tam giác FCB .
- ② Chứng minh G là trung điểm của EF và tìm vị trí của điểm H trên đoạn thẳng OC sao cho $OI + 4OH$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- ③ Đường thẳng qua B song song với đường thẳng FC cắt đường thẳng CA tại S . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng FH và AD . Chứng minh đường thẳng OS song song với đường thẳng CK .



Lời giải.

- ① Ta thấy BD vuông góc DC do D thuộc (O) và BD vuông góc AC do E là trực tâm tam giác ABC nên F, D, C thẳng hàng và $\widehat{FDA} = \widehat{FCB}$ nên $\triangle FAD \sim \triangle FCB$.
- ② Ta có $\widehat{GAF} = 180^\circ - \widehat{GAO} - \widehat{OAB} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{FBH} = 90^\circ - \widehat{FBH} = \widehat{AFG}$ nên $GA = GF$

nên $\widehat{GAE} = 90^\circ - \widehat{GAF} = 90^\circ - \widehat{GFA} = \widehat{GEA}$ nên $GA = GE$ hay $GF = GE = GA$.

Do G là trung điểm EF nên $GA = GD = GF = GE$ hay G nằm trên trung trực AD , kết hợp $OA = OD$ nên OG là trung trực AD nên OG vuông góc AD tại M nên $OH \cdot OI = OM \cdot OG = OA^2$ theo hệ thức lượng.

Từ đó $OI + 4OH \geq 2\sqrt{OI \cdot 4OH} = 4OA = 4R$.

Dấu bằng xảy ra khi $OI = 4OH \Rightarrow 4OH^2 = R^2 \Rightarrow OH = R/2 \Rightarrow H$ là trung điểm OC .

- ③ Để có HF là phân giác góc $\widehat{AHD}$ và DE là phân giác góc $\widehat{ADH} \Rightarrow \widehat{AGK} = \widehat{AGE} = 2\widehat{ADE} = \widehat{KDH}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm trong đường tròn đường kính AH) nên $\triangle HDK \sim \triangle HGA$ (g.g) $\Rightarrow HK \cdot HG = HD \cdot HA$.

Lại dễ có $\triangle HBA \sim \triangle HDC$ (g.g) nên $HD \cdot HA = HB \cdot HC \Rightarrow HK \cdot HG = HB \cdot HC \Rightarrow K$ là trực tâm $\triangle BGC \Rightarrow CK \perp BG$ (1).

Do $BS \parallel CF$ nên $\widehat{BSC} = \widehat{ACF} = \widehat{FBE}$ và $\widehat{SCB} = \widehat{BFE}$ nên $\triangle SBC \sim \triangle BEF$ (g.g) có O, G lần lượt là trung điểm $BC, EF \Rightarrow \triangle SBO \sim \triangle BEG \Rightarrow \widehat{SOB} = \widehat{BGE}$ nên $\widehat{GBO} + \widehat{SBO} = \widehat{GBH} + \widehat{BGE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BNO} = 90^\circ$ hay $BG \perp SO$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra OS song song với CK .

Bài tập 4 (Lim Olympic - Ninh Bình - Bài 4)

- ① Tìm tất cả các cặp $(x; y)$ nguyên dương thỏa mãn $x^2 - 2y^2 + 2x - y - xy = 21$.
- ② Cho 2026 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$. Chứng minh tồn tại hai số nguyên dương x, y thỏa mãn $y > 1$ và $xy + a_i$ chia hết cho $x + a_i$ với mọi số nguyên dương i từ 1 đến 2026.

Lời giải.

- ① Ta có $(x + y)(x - 2y) + (x + y) + (x - 2y) + 1 = 22$ hay $(x + y + 1)(x - 2y + 1) = 22$.

Chú ý x, y nguyên dương nên có $x + y + 1 = 11$ và $x - 2y + 1 = 2$ hoặc $x + y + 1 = 22$ và $x - 2y + 1 = 1$. Giải các trường hợp ra có $(x, y) = (7, 3), (14, 7)$.

- ② Chọn $x = 1$ và $y = 1 + (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_{2026} + 1)$.

Ta có $y - 1$ chia hết cho $a_i + 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 2026$.

Do đó $xy + a_i$ chia hết cho $x + a_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 2026$.

Bài tập 5 (Lim Olympic - Ninh Bình - Bài 5)

Xét a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.

- ① Chứng minh $a + b + c \geq 3$.
- ② Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(2a + b + c)^3}{b + c} + \frac{(2b + c + a)^3}{c + a} + \frac{(2c + a + b)^3}{a + b}$$

Lời giải.

① Ta có $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) = 9$ nên $a + b + c \geq 3$.

② $\frac{(2a + b + c)^3}{b + c} = \frac{8a^3 + 6a(b + c)(2a + b + c) + (b + c)^3}{b + c} \geq 8\frac{a^3}{b + c} + 6a(a + 3) + (b + c)^2$.

$$\text{Để ý } \frac{a^3}{b + c} + \frac{b^3}{c + a} + \frac{c^3}{a + b} = \frac{a^4}{ab + ac} + \frac{b^4}{bc + ba} + \frac{c^4}{ca + cb} \\ \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2ab + 2bc + 2ca} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + bc + ca}{2}.$$

$$\text{Do đó } P \geq 8 \cdot \frac{ab + bc + ca}{2} + 8(a^2 + b^2 + c^2) + 18(a + b + c) + 2(ab + bc + ca)$$

$$\geq 14(ab + bc + ca) + 18(a + b + c) \geq 14 \cdot 3 + 18 \cdot 3 = 96.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 96, dấu bằng chẳng hạn khi $a = b = c = 1$.

Bài tập 6 (Lim Olympic - Ninh Bình - Bài 6)

Có 8 "chú" mèo, mỗi "chú" được đặt tên là một dãy ký tự thuộc vào tập hợp $\{000; 001; 010; 011; 100; 101; 110; 111\}$ sao cho không có hai "chú" mèo nào trùng tên. Hai "chú" mèo gọi là "liên kết" với nhau nếu trong dãy ký tự tên của chúng, có đúng một vị trí mà hai ký tự tương ứng khác nhau (ví dụ: hai "chú" mèo 000 và 001 được gọi là liên kết với nhau, nhưng hai "chú" mèo 000 và 011 thì không được gọi là liên kết với nhau). Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất, sao cho trong k "chú" mèo phân biệt được chọn tùy ý từ 8 "chú" mèo trên, tồn tại 3 "chú" mèo mà một "chú" liên kết với hai "chú" kia.

Lời giải.

Xét tập hợp gồm 4 chú mèo thuộc nhóm $A = \{000; 011; 101; 110\}$.

Để ý không có 2 chú mèo nào liên kết với nhau, do đó $k > 4$, tức $k \geq 5$.

Ta sẽ chứng minh rằng $k = 5$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Giả sử phản chứng rằng mỗi chú mèo trong nhóm 5 chú đã chọn sẽ liên kết với nhiều nhất 1 chú mèo khác của nhóm này.

Để ý mỗi chú mèo liên kết với đúng 3 chú mèo khác trong 8 chú mèo, chẳng hạn 000 chỉ liên kết với 001, 010, 100.

Ta sẽ tính tổng số lượt liên kết từ 5 chú mèo được chọn bằng 2 cách:

Cách 1: Mỗi chú mèo liên kết 3 chú mèo khác nên tổng số lượt liên kết là

$$5 \times 3 = 15$$

Cách 2: Ta chia thành hai nhóm:

- ◇ Liên kết giữa hai chú mèo cùng thuộc nhóm 5 chú mèo: Gọi x là số liên kết nằm trong nhóm này, vì mỗi liên kết được tính 2 lần (2 chú mèo thuộc nhóm) nên tổng số lượt liên kết là $2x$.
- ◇ Liên kết giữa một chú mèo thuộc nhóm và một chú mèo ngoài nhóm: Gọi y là số liên kết nối giữa 1 chú mèo thuộc nhóm với 1 chú mèo ngoài nhóm, khi đó mỗi liên kết này chỉ có 1 đầu nằm ở trong nhóm nên chỉ được tính đúng 1 lần, tức bằng y .

Do đó ta suy ra được $2x + y = 15$.

Vì mỗi chú mèo trong nhóm liên kết với tối đa 1 chú mèo khác thuộc nhóm nên $x \leq [5/2] = 2$.

Mỗi chú mèo ngoài nhóm liên kết tối đa 3 chú mèo khác, do đó số liên kết từ ngoài nhóm vào trong nhóm sẽ không vượt quá $3 \times 3 = 9$ hay $y \leq 9$.

Từ đó $15 = 2x + y \leq 2.2 + 9 = 13$, vô lý.

Do đó giả sử phản chứng là sai, suy ra giá trị nhỏ nhất của k là 5.