

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: TOÁN (môn chuyên)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 26/5/2026

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + x}{x - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 1} \right) \left(\frac{x - 1}{x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x}} \right)$, ($x > 0$, $x \neq 1$).
Rút gọn P và tìm x thỏa mãn $(x - \sqrt{x} - 3) \cdot P = 1$.

b) Một hộp chứa 9 quả bóng màu cam và một số quả bóng màu trắng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp, xem màu rồi trả lại hộp. Biết xác suất của biến cố: “Lấy được quả bóng màu trắng” là $\frac{2}{5}$. Hỏi trong hộp có bao nhiêu quả bóng màu trắng?

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$.

b) Cho $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = -4x + m^2 - 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 2026$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) và dây cung BC . Điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại M, N .

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh $EF \parallel MN$ và $EF \perp OA$.

c) Giả sử đường tròn (O) và dây BC cố định, xác định vị trí điểm A trên cung lớn BC để diện tích tam giác AEH đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. (1,0 điểm) Số nguyên dương có bốn chữ số trên bảng có thể biến đổi thành một số có bốn chữ số khác theo quy tắc sau: Hoặc cộng thêm 1 vào hai chữ số liên tiếp của nó nếu hai chữ số này đều không bằng 9, hoặc trừ đi 1 từ hai chữ số liên tiếp của nó nếu hai chữ số này đều không bằng 0. Hỏi bằng các phép biến đổi như vậy, có thể thu được số 1000 từ số 2026 hay không?

HẾT

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN NĂM HỌC 2026–2027

Đội tuyển HSG Quốc gia môn Toán tỉnh Lai Châu năm học 2023-2024, 2024-2025 và 2025-2026

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{x} + x}{x - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{x - 1} \right) \left(\frac{x - 1}{x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x}} \right), \quad (x > 0, x \neq 1).$$

Rút gọn P và tìm x thỏa mãn $(x - \sqrt{x} - 3) \cdot P = 1$.

b) Một hộp chứa 9 quả bóng màu cam và một số quả bóng màu trắng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp, xem màu rồi trả lại hộp. Biết xác suất của biến cố: “Lấy được quả bóng màu trắng” là $\frac{2}{5}$. Hỏi trong hộp có bao nhiêu quả bóng màu trắng?

Lời giải.

a) Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t > 0, t \neq 1$). Khi đó $x = t^2$ và

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{t + t^2}{t^2 - t} + \frac{t}{t + 1} - \frac{t^2 + 2t - 3}{t^2 - 1} \right) \cdot \frac{t^2 - 1}{t^3 - t^2 + 4t} \\ &= \left(\frac{t + 1}{t - 1} + \frac{t}{t + 1} - \frac{(t + 3)(t - 1)}{(t - 1)(t + 1)} \right) \cdot \frac{(t - 1)(t + 1)}{t(t^2 - t + 4)} \\ &= \left(\frac{t + 1}{t - 1} - \frac{3}{t + 1} \right) \cdot \frac{(t - 1)(t + 1)}{t(t^2 - t + 4)} \\ &= \frac{(t + 1)^2 - 3(t - 1)}{(t - 1)(t + 1)} \cdot \frac{(t - 1)(t + 1)}{t(t^2 - t + 4)} \\ &= \frac{t^2 - t + 4}{(t - 1)(t + 1)} \cdot \frac{(t - 1)(t + 1)}{t(t^2 - t + 4)} = \frac{1}{t} = P = \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Ta có

$$(x - \sqrt{x} - 3)P = 1 \iff \frac{t^2 - t - 3}{t} = 1 \iff t^2 - 2t - 3 = 0 \iff (t - 3)(t + 1) = 0.$$

Vì $t > 0$ nên $t = 3$, suy ra $x = 9$. Vậy $x = 9$.

b) Gọi số quả bóng màu trắng là n ($n \in \mathbb{N}^*$). Tổng số quả bóng trong hộp là $n + 9$. Theo đề bài, ta có

$$\frac{n}{n + 9} = \frac{2}{5}.$$

Suy ra

$$5n = 2n + 18 \iff 3n = 18 \iff n = 6.$$

Vậy trong hộp có 6 quả bóng màu trắng.

□

Câu 2. (2,0 điểm)**a) Giải phương trình**

$$x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0.$$

b) Cho $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = -4x + m^2 - 4$. Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1^3 + 4x_1^2$.**Lời giải.****a) Điều kiện xác định:**

$$x^2 - x \geq 0 \iff x \leq 0 \text{ hoặc } x \geq 1.$$

Đặt $t = x^2 - x$ ($t \geq 0$). Khi đó

$$x^4 - 2x^3 + x = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) = t^2 - t.$$

Phương trình trở thành

$$t^2 - t - \sqrt{2t} = 0. \tag{1}$$

Đặt $u = \sqrt{2t}$ ($u \geq 0$), suy ra $t = \frac{u^2}{2}$. Từ (1), ta có

$$\frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} - u = 0$$

$$\iff u^4 - 2u^2 - 4u = 0$$

$$\iff u(u^3 - 2u - 4) = 0$$

$$\iff u(u - 2)(u^2 + 2u + 2) = 0.$$

Vì $u \geq 0$ và $u^2 + 2u + 2 > 0$ nên $u = 0$ hoặc $u = 2$.– Với $u = 0$, ta có $t = 0$, hay $x^2 - x = 0$, suy ra $x = 0$ hoặc $x = 1$.– Với $u = 2$, ta có $t = 2$, hay $x^2 - x = 2$, suy ra

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff (x - 2)(x + 1) = 0.$$

Do đó $x = 2$ hoặc $x = -1$.

Các giá trị trên đều thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình có tập nghiệm

$$S = \{-1; 0; 1; 2\}.$$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 = -4x + m^2 - 4 \iff x^2 + 4x + 4 - m^2 = 0.$$

Hay

$$(x + 2)^2 = m^2. \tag{2}$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, do đó $m \neq 0$.

Gọi hai nghiệm là x_1, x_2 . Theo định lí Viète, ta có

$$x_1 + x_2 = -4.$$

Mặt khác, theo đề bài

$$x_2 = x_1^3 + 4x_1^2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} x_1 + x_1^3 + 4x_1^2 &= -4 \\ \Leftrightarrow x_1^3 + 4x_1^2 + x_1 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x_1 + 4)(x_1^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Vì x_1 là số thực nên $x_1 = -4$. Khi đó $x_2 = 0$.

Thay vào phương trình hoành độ, ta có hai nghiệm là -4 và 0 , nên

$$x^2 + 4x + 4 - m^2 = x(x + 4).$$

Do đó

$$4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Vậy $m = 2$ hoặc $m = -2$.

□

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2.$$

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 2026.$$

Lời giải.

a) *Cách 1.* Nếu $x = 0$ thì phương trình trở thành $y^2 = 0$, suy ra $y = 0$.

Nếu $y = 0$ thì tương tự ta cũng có $x = 0$. Vậy $(0; 0)$ là một nghiệm.

Xét $xy \neq 0$. Xem phương trình đã cho là phương trình bậc hai theo x , ta có

$$(y^2 - 1)x^2 - yx - y^2 = 0. \quad (1)$$

Trước hết, nếu $y = 1$ thì từ phương trình ban đầu suy ra

$$x^2 + x + 1 = x^2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Nếu $y = -1$ thì

$$x^2 - x + 1 = x^2 \iff x = 1.$$

Xét $|y| \geq 2$. Khi đó $y^2 - 1 \neq 0$. Để (1) có nghiệm nguyên x , biệt thức

$$\Delta = y^2 + 4y^2(y^2 - 1) = y^2(4y^2 - 3)$$

phải là số chính phương. Do đó $4y^2 - 3$ là số chính phương. Đặt

$$4y^2 - 3 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Khi đó

$$(2|y| - k)(2|y| + k) = 3.$$

Vì $|y| \geq 2$ nên $2|y| - k$ và $2|y| + k$ là hai số nguyên dương, suy ra chỉ có thể

$$\begin{cases} 2|y| - k = 1, \\ 2|y| + k = 3. \end{cases}$$

Từ đó $|y| = 1$, mâu thuẫn với $|y| \geq 2$. Vậy không có nghiệm nào trong trường hợp này.

Suy ra các nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x; y) \in \{(0; 0), (-1; 1), (1; -1)\}.$$

Cách 2. Ta có

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2 \iff (x + y)^2 = xy(xy + 1). \quad (2)$$

Nếu $x + y = 0$ thì từ (2) suy ra $xy(xy + 1) = 0$, nên $xy = 0$ hoặc $xy = -1$.

- Với $xy = 0$, kết hợp $x + y = 0$ ta được $(x; y) = (0; 0)$.
- Với $xy = -1$, kết hợp $x + y = 0$ ta được $(x; y) = (1; -1)$ hoặc $(x; y) = (-1; 1)$.

Nếu $x + y \neq 0$ thì $xy(xy + 1)$ là một số chính phương khác 0. Đặt $n = xy$. Vì $(n, n + 1) = 1$, nên $|n|$ và $|n + 1|$ phải cùng là số chính phương. Nhưng hai số chính phương không âm liên tiếp chỉ có thể là 0 và 1, dẫn tới $n = 0$ hoặc $n = -1$. Khi đó từ (2) lại suy ra $x + y = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $x + y \neq 0$.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là

$$(x; y) \in \{(0; 0), (-1; 1), (1; -1)\}.$$

b) Đặt

$$S = a^2 + b^2 + c^2, \quad q = ab + bc + ca.$$

Vì $a + b + c = 3$ nên

$$S + 2q = (a + b + c)^2 = 9.$$

Suy ra

$$q = \frac{9 - S}{2}. \quad (1)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$S = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3. \quad (2)$$

Từ (1), biểu thức A trở thành

$$\begin{aligned} A &= 12S + \frac{4q}{S} + 2026 \\ &= 12S + \frac{4}{S} \cdot \frac{9 - S}{2} + 2026 \\ &= 12S + \frac{18}{S} - 2 + 2026 \\ &= 12S + \frac{18}{S} + 2024. \end{aligned}$$

Vì $S \geq 3$, ta có

$$12S + \frac{18}{S} - 42 = \frac{6(2S^2 - 7S + 3)}{S} = \frac{6(S - 3)(2S - 1)}{S} \geq 0.$$

Suy ra

$$12S + \frac{18}{S} \geq 42.$$

Do đó

$$A \geq 42 + 2024 = 2066.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2066. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

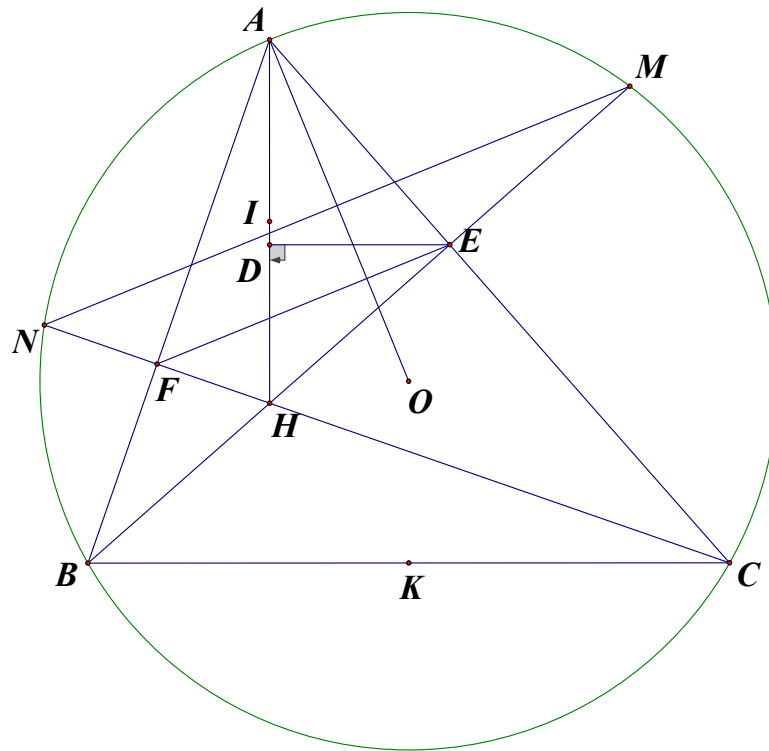
□

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và dây cung BC . Điểm A di chuyển trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại M, N .

- Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
- Chứng minh $EF \parallel MN$ và $EF \perp OA$.
- Giả sử đường tròn (O) và dây BC cố định, xác định vị trí điểm A trên cung lớn BC để diện tích tam giác AEH đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.



- a)** Theo giả thiết ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
- b)** Từ tứ giác $BCEF$ nội tiếp (chứng minh trên) ta có $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (cùng chắn cung BF). Mặt khác ta có

$$\widehat{NAB} = \widehat{FCB} \text{ (cùng chắn cung } BN \text{ của } (O))$$

Suy ra

$$\widehat{FEB} = \widehat{NAB}$$

mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $MN \parallel EF$. Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên

$$\widehat{BEF} = \widehat{ECF}$$

(hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF) hay

$$\widehat{ABN} = \widehat{ACN}$$

Xét (O) có

$$\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$$

Mà $\widehat{ABM} = \frac{1}{2}\widehat{AOM}$ và $\widehat{ACN} = \frac{1}{2}\widehat{AON}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung) Suy ra

$$\widehat{AOM} = \widehat{AON}$$

Tam giác MON cân tại O có OA là đường phân giác nên OA cũng là đường cao nên $OA \perp MN$. Mà $MN \parallel EF$ suy ra

$$OA \perp EF.$$

- c) Gọi I là trung điểm của AH , K là trung điểm của BC . Vì

$$\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$$

nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH . Do đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

Theo ý a), tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Lại có

$$\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$$

nên B, C, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC . Do đó K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCEF$.

Suy ra I và K lần lượt là tâm của hai đường tròn cùng đi qua E, F . Vì vậy IK là đường trung trực của dây chung EF , nên

$$IK \perp EF. \quad (1)$$

Theo ý b), ta có

$$EF \perp OA. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$IK \parallel OA. \quad (3)$$

Mặt khác, K là trung điểm của dây BC nên $OK \perp BC$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên $AH \perp BC$. Suy ra

$$AH \parallel OK. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra tứ giác $AOKI$ là hình bình hành. Do đó

$$AI = OK.$$

Mà I là trung điểm của AH , nên

$$AH = 2AI = 2OK. \quad (5)$$

Xét tam giác AEH vuông tại E , có I là trung điểm của cạnh huyền AH , nên

$$EI = \frac{1}{2}AH = AI = OK. \quad (6)$$

Vì đường tròn (O) và dây BC cố định nên OK không đổi. Từ (5), (6), suy ra AH và EI đều không đổi.

Kẻ $ED \perp AH$ tại D . Khi đó

$$ED \leq EI.$$

Diện tích tam giác AEH là

$$S_{AEH} = \frac{1}{2}AH \cdot ED \leq \frac{1}{2}AH \cdot EI.$$

Mà

$$\frac{1}{2}AH = OK, \quad EI = OK,$$

nên

$$S_{AEH} \leq OK^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$ED = EI.$$

Điều này tương đương với $I \equiv D$, hay $EI \perp AH$. Khi đó tam giác AEH vuông cân tại E , suy ra

$$\widehat{EAH} = 45^\circ.$$

Vì $E \in AC$ nên

$$\widehat{EAH} = \widehat{CAH}.$$

Mặt khác, $AH \perp BC$ nên

$$\widehat{CAH} = 90^\circ - \widehat{ACB}.$$

Do đó

$$90^\circ - \widehat{ACB} = 45^\circ \iff \widehat{ACB} = 45^\circ.$$

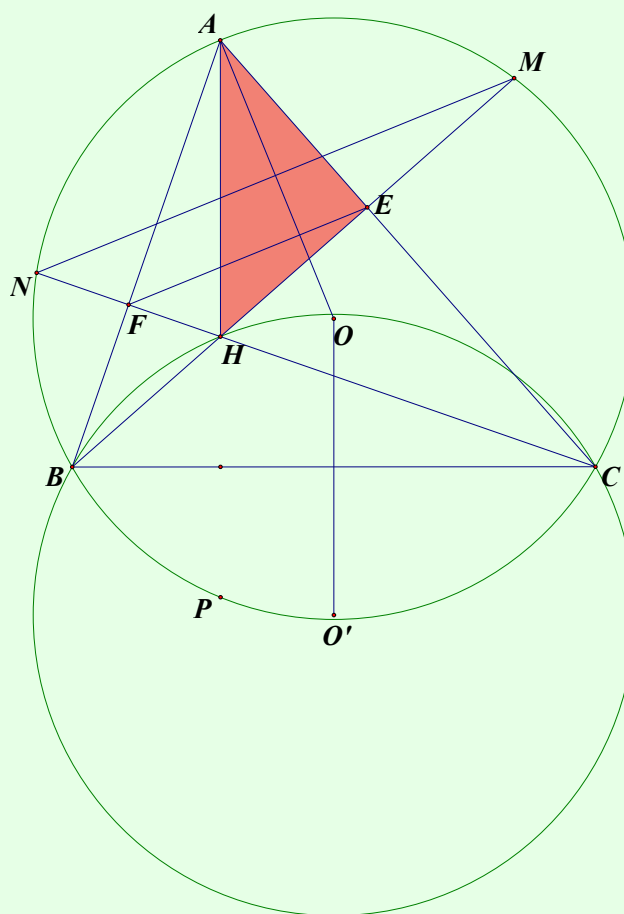
Vậy điểm A trên cung lớn BC sao cho

$$\boxed{\widehat{ACB} = 45^\circ}$$

thì diện tích tam giác AEH đạt giá trị lớn nhất.

□

Mở rộng. Ta dễ dàng thấy bài hình chính là một mô hình trực tâm cơ bản, từ đây chúng tôi mở rộng cho bạn đọc một vài tính chất quan trọng của mô hình trực tâm:



Với P là giao điểm của AH với (O) , ta có tính chất H và P đối xứng với nhau qua BC . Hơn nữa, (BHC) đối xứng với (O) qua BC . Phần chứng minh xin nhường lại cho các độc giả.

Câu 5. (1,0 điểm)

Số nguyên dương có bốn chữ số trên bảng có thể biến đổi thành một số có bốn chữ số khác theo quy tắc sau: Hoặc cộng thêm 1 vào hai chữ số liên tiếp của nó nếu hai chữ số này đều không bằng 9, hoặc trừ đi 1 từ hai chữ số liên tiếp của nó nếu hai chữ số này đều không bằng 0. Hỏi bằng các phép biến đổi như vậy, có thể thu được số 1000 từ số 2026 hay không?

Lời giải. Với số có bốn chữ số $\overline{abcd}$, xét đại lượng

$$T = a - b + c - d.$$

Ta chứng minh T không thay đổi sau mỗi phép biến đổi. Thật vậy:

- Nếu cộng hoặc trừ cùng 1 vào hai chữ số thứ nhất và thứ hai thì $a - b$ không đổi.
- Nếu cộng hoặc trừ cùng 1 vào hai chữ số thứ hai và thứ ba thì $-b + c$ không đổi.
- Nếu cộng hoặc trừ cùng 1 vào hai chữ số thứ ba và thứ tư thì $c - d$ không đổi.

Do đó $T = a - b + c - d$ là một bất biến của các phép biến đổi đã cho.

Với số 2026, ta có

$$T_{2026} = 2 - 0 + 2 - 6 = -2.$$

Với số 1000, ta có

$$T_{1000} = 1 - 0 + 0 - 0 = 1.$$

Vì $T_{2026} \neq T_{1000}$ nên không thể biến đổi số 2026 thành số 1000 bằng các phép biến đổi đã cho. $\square$

HẾT
