

I. LÝ THUYẾT

Mỗi số phức, ở khía cạnh đại số, là nghiệm tương ứng duy nhất một tam thức bậc hai monic hệ số thực có biệt thức âm. Nếu z là nghiệm của $f(x) = x^2 + ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $\Delta = a^2 - 4b < 0$ thì nghiệm còn lại sẽ gọi là liên hợp của nó. Tích hai nghiệm sẽ là b và là một số không âm. Căn bậc hai của b gọi là module.

Ở khía cạnh hình học, mỗi số phức sẽ là cặp tọa độ của một vector, và độ lớn của vector đó chính là module.

Module của số phức. Số phức liên hợp:

$z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ thì module của z là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$. Ta có: Phần thực của z là $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, phần ảo của z là $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2}$;

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, |z|^2 = z \bar{z}; \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \bar{\bar{z}} = z; \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} (z_2 \neq 0).$$

1/ Đẳng thức Mô - Đun

$$+ |m z_1 + n z_2|^2 = m^2 |z_1|^2 + n^2 |z_2|^2 + m n (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \text{ với } m, n \in \mathbb{R} \text{ và } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$$+ |z + z_1|^2 + |z + z_2|^2 = 2 \left[\left| z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 \right] \text{ với } z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$$+ |z_1 + z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \right| \text{ với } z_1, z_2 \text{ là các số phức khác } 0.$$

$$+ \text{Nếu } \begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a \neq 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases} \text{ thì phương trình } az^2 + bz + c = 0 \text{ có hai nghiệm phức không}$$

$$\text{thực } z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}. \text{ Dễ thấy } z_1 = \bar{z}_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|.$$

2/ BĐT Mô - Đun

Lớp 7: $|AB - BC| \leq AC \leq AB + BC$.

Lớp 10: $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Lớp 12: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

$|z + z_1| + |z + z_2| \geq |z_1 - z_2|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} z + z_1 = k[(z + z_1) + (-z - z_2)] \\ z + z_2 = k[(z + z_2) + (-z - z_1)] \end{cases} (k \in \mathbb{R}; k \in [0; 1])$$

$$\begin{cases} z + z_2 = 0 \\ z + z_1 = k(z + z_2); (z + z_2 \neq 0; k \in \mathbb{R}; k \geq 0) \end{cases}$$

$||z + z_1| - |z + z_2|| \leq |z_1 - z_2|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} z + z_1 = k[(z + z_1) + (-z - z_2)] \\ z + z_2 = k[(-z - z_1) + (z + z_2)] \end{cases} (k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty))$$

$$\begin{cases} z + z_2 = 0 \\ z + z_1 = k(z + z_2); (z + z_2 \neq 0; k \in \mathbb{R}, k \leq 0) \end{cases}$$



II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Câu 1:

Minh Hoạ-T4/N2021

Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất $|3z_1 + z_2 - 5i|$ bằng

- A.** $5 - \sqrt{19}$. **B.** $5 + \sqrt{19}$. **C.** $-5 + 2\sqrt{19}$. **D.** $5 + 2\sqrt{19}$.

a Định hướng

Tất cả giả thiết của đề bài đều nói về Mô đun của số phức, chính vì thế ta xét: $|mz_1 + nz_2|^2$.
Bằng tính toán ta có kết quả: $|mz_1 + nz_2|^2 = m^2|z_1|^2 + n^2|z_2|^2 + mn(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)$. Trong đó m, n là các số thực và z_1, z_2 là các số phức. Như vậy từ giả thiết ta sẽ tính được $|3z_1 + z_2|$ và đưa bài toán đã cho về bài toán quen thuộc.

b Lời giải tham khảo

Lời giải

$$+3 = |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = 5 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) \Rightarrow (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = 2;$$

$$|3z_1 + z_2| = \sqrt{9|z_1|^2 + |z_2|^2 + 3(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)} = \sqrt{19}.$$

+Áp dụng bất đẳng thức mô đun, có:

$$||3z_1 + z_2| - |-5i|| \leq |(3z_1 + z_2) + (-5i)| \leq |3z_1 + z_2| + |-5i|$$

$$\Leftrightarrow 5 - \sqrt{19} \leq |3z_1 + z_2 - 5i| \leq 5 + \sqrt{19}.$$

+Vì đây là bài toán trắc nghiệm nên chọn B; Tuy nhiên $|3z_1 + z_2 - 5i| = 5 + \sqrt{19}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} k \in \mathbb{R}, k \geq 0 \\ 3z_1 + z_2 = k(-5i) \end{cases} \Rightarrow 3z_1 + z_2 = -i\sqrt{19} \Rightarrow \text{Chọn B}$

Câu 2:

Minh Hoạ-L2/N2017

Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Giá trị của biểu thức $P = m + M$ bằng

- A.** $\sqrt{13} + \sqrt{73}$. **B.** $\frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$. **C.** $5\sqrt{2} + \sqrt{73}$. **D.** $\frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

a Định hướng

$|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} \Rightarrow |z + 2 - i| + |-z + 4 + 7i| = |(z + 2 - i) + (-z + 4 + 7i)|$ sẽ suy ra $z = a(x) + b(x)i$ với $x \in [0; 1]$. Đến đây ta có bài toán quen thuộc.

b Lời giải tham khảo

Lời giải

$$\begin{aligned} &+|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} \Rightarrow |z + 2 - i| + |-z + 4 + 7i| = |(z + 2 - i) + (-z + 4 + 7i)| \\ &\Rightarrow z + 2 - i = x(6 + 6i); (x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1) \Rightarrow z = (-2 + 6x) + (1 + 6x)i \\ &\Rightarrow |z - 1 + i| = |(-3 + 6x) + (2 + 6x)i| = \sqrt{72x^2 - 12x + 13}. \end{aligned}$$

+Xét hàm số $f(x) = \sqrt{72x^2 - 12x + 13}, x \in [0; 1]$, dễ thấy $\min_{[0; 1]} f(x) = f\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$;

$$\max_{[0; 1]} f(x) = f(1) = \sqrt{73}. \text{ Vậy } m = \frac{5\sqrt{2}}{2}; M = \sqrt{73} \Rightarrow \text{Chọn B}$$

Câu 3:

Chuyên Thái Bình-L5/N2018

Cho số phức z thỏa mãn $|(1 + i)z + 2| + |(1 + i)z - 2| = 4\sqrt{2}$. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Đặt $w = m + ni$, giá trị của $|w|^{2018}$ bằng

- A.** 2^{1009} . **B.** 4^{1009} . **C.** 5^{1009} . **D.** 6^{1009} .

a Định hướng

$$+\text{Biến đổi giả thiết: } |(1 + i)z + 2| + |(1 + i)z - 2| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow |z + 1 - i| + |z - 1 + i| = 4.$$

+Áp dụng BĐT: $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$ dễ dàng tìm được m .

$$+\text{Áp dụng } |z + z_1|^2 + |z + z_2|^2 = 2 \left[\left| z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 \right] \text{ và } \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ ta}$$

có : $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ tìm được n .

b Lời giải tham khảo

Lời giải

+ $4 = |z + 1 - i| + |z - 1 + i| \geq |z + 1 - i + z - 1 + i| = |2z| \Rightarrow |z| \leq 2$ (1). Đẳng thức ở (1) xảy

ra khi $\begin{cases} z + 1 - i = k(z - 1 + i), (k \in \mathbb{R}, k \geq 0) \\ |z| = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}(-1 + i) \Rightarrow m = 2$.

$$+ 4 = |z + 1 - i| + |z - 1 + i| \leq \sqrt{2[|z + 1 - i|^2 + |z - 1 + i|^2]} = 2\sqrt{|z|^2 + |i - 1|^2}$$

$\Rightarrow |z| \geq \sqrt{2}$ (2). Đẳng thức ở (2) xảy ra khi

$$\begin{cases} |z + 1 - i| = |z - 1 + i| \\ |z| = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow z = \pm(1 + i) \Rightarrow n = \sqrt{2}. \text{ Vậy } |w|^{2018} = 6^{1009} \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 4:

THPT Đặng Thúc Hứa Nghệ An-Lần 1 Năm 2018

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $5|z - i| = |z + 1 - 3i| + 3|z - 1 + i|$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z - 2 + 3i|$ bằng

A. $\frac{13}{3}$.

B. $1 + \sqrt{13}$.

C. 9.

D. $4\sqrt{5}$.

a Định hướng

+ Ta có: $|z + 1 - 3i|^2 + |z - 1 + i|^2 = 2[|z - i|^2 + |1 - 2i|^2]$.

+ Mặt khác:

$$5|z - i| = |z + 1 - 3i| + 3|z - 1 + i| \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)}(|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|) \\ = \sqrt{20(|z - i|^2 + 5)}. \text{ Từ đó suy ra } |z - i| \leq 2\sqrt{5}. \text{ Đến đây ta có bài toán quen thuộc.}$$

b Lời giải tham khảo

Lời giải

+ Ta có: $|z + 1 - 3i|^2 + |z - 1 + i|^2 = 2[|z - i|^2 + |1 - 2i|^2]$; Từ đó

$$5|z - i| = |z + 1 - 3i| + 3|z - 1 + i| \leq \sqrt{(1^2 + 3^2)}(|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|) \\ = \sqrt{20(|z - i|^2 + 5)}. \text{ Suy ra } |z - i| \leq 2\sqrt{5}.$$

+

$$|z - 2 + 3i| = |(z - i) + (-2 + 4i)| \leq |z - i| + |-2 + 4i| \leq 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |z - 2 + 3i| \leq 4\sqrt{5} \quad (1). \quad \text{Đẳng thức ở (1) xảy ra khi}$$

$$\begin{cases} \frac{|z + 1 - 3i|}{1} = \frac{|z - 1 + i|}{3} \\ |z - i| = 2\sqrt{5} \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 \\ z - i = k(-2 + 4i) \end{cases} \Rightarrow z = -2 + 5i. \text{ Vậy } \max |z - 2 + 3i| = 4\sqrt{5} \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 5

Chuyên Sư Phạm Hà Nội-L2/N2021

Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $P = |z + 2| + 2|z - 3|$. Tổng $M + m$ bằng

- ☒ A. 14.
 ☐ B. 7.
 ☐ C. $\frac{45 + 3\sqrt{35}}{5}$.
 ☐ D. $\frac{15 + 5\sqrt{33}}{3}$.

a Định hướng

$+ |z + z_k|^2 = |(z + w) + (z_k - w)|^2 = |z + w|^2 + |z_k - w|^2 + \overline{(z + w)}(z_k - w) + (z + w)\overline{(z_k - w)}$
 với $k = \overline{1; 2}$. Do đó nếu $z_1 - w = p(z_2 - w)$ với $p \in \mathbb{R}$ thì sẽ tính được $a|z + z_1|^2 + b|z + z_2|^2$ theo $|z + w|$ và $|z_k - w|$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó dễ dàng tính được M .
 +Nhìn vào kết luận, ta tìm cách làm xuất hiện hệ số 2 trước biểu thức $|z + 2|$ (Cân bằng hệ số)
 bằng công thức $|z_1 + z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \right|$ với z_1, z_2 là các số phức khác 0 nhưng không được.
 Viết $P = (|z - 2| + |z - 3|) + |z - 3|$ ta dễ dàng tìm được m .

b Lời giải tham khảo

Lời giải

+Ta có
$$\begin{cases} |z + 2|^2 = |(z - 1) + 3|^2 = |z - 1|^2 + 9 + 3(z - 1 + \overline{z - 1}) = 13 + 3(z - 1 + \overline{z - 1}) \\ |z - 3|^2 = |(z - 1) - 2|^2 = |z - 1|^2 + 4 - 2(z - 1 + \overline{z - 1}) = 8 - 2(z - 1 + \overline{z - 1}) \end{cases} \text{ suy}$$

ra $2|z + 2|^2 + 3|z - 3|^2 = 50$;

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}|z + 2| + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}|z - 3| \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)(2|z + 2|^2 + 3|z - 3|^2)} = \frac{5\sqrt{33}}{3}$$
. Vì làm bài

trắc nghiệm nên dự đoán $M = \frac{5\sqrt{33}}{3}$.

+ $P = (|z - 2| + |z - 3|) + |z - 3| \geq |z - 2 + z - 3| + 0 = 5$. Khi $z = 3$ thỏa mãn điều kiện đề bài thì $P = 5$. Vậy $m = 5 \Rightarrow \text{Chọn D}$

c Bài tập tương tự

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu

thức $T = |z + 1 - i| + |z - 5 - 4i|$ bằng

- Ⓐ. $3\sqrt{7}$. Ⓑ. $3\sqrt{5}$. Ⓒ. $3\sqrt{6}$. Ⓓ. $4\sqrt{2}$.

Câu 6:

Sở Vĩnh Phúc-L2/N2018

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - i| = 2\sqrt{2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = |z + 3 - 2i| + |z - 3 + 4i|$. Giá trị $M + m$ bằng

- Ⓐ. $16\sqrt{2}$. Ⓑ. $11\sqrt{2}$. Ⓒ. $2\sqrt{26} + 8\sqrt{2}$. Ⓓ. $2\sqrt{26} + 6\sqrt{2}$.

a Định hướng

+ Tìm m khá đơn giản và rõ ràng áp dụng: $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$.

+ Ta đã biết: $|z + z_1|^2 + |z + z_2|^2 = 2 \left[\left| z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 \right]$, do đó ta có:

$|z + 3 - 2i|^2 + |z - 3 + 4i|^2 = 2 \left[|z + i|^2 + |3 - 3i|^2 \right]$. Mặt khác biết $|z - 2 - i| = 2\sqrt{2}$, tìm $\max |z + i|$ là bài toán quen thuộc. Như vậy áp dụng BĐT: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ là có thể tìm được M .

b Lời giải tham khảo

Lời giải

+ $H = |z + 3 - 2i| + |-z + 3 - 4i| \geq |z + 3 - 2i - z + 3 - 4i| = 6\sqrt{2}$ (1).

Đẳng thức ở (1) xảy ra khi $\begin{cases} z + 3 - 2i = k(6 - 6i); k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 1 \\ |z - 2 - i| = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow z = -i$.

+ $H \leq \sqrt{2[|z + 3 - 2i|^2 + |z - 3 + 4i|^2]} = \sqrt{4[|z + i|^2 + |3 - 3i|^2]} = 2\sqrt{|z + i|^2 + 18}$.

$|z + i| = |(z - 2 - i) + (2 + 2i)| \leq |z - 2 - i| + |2 + 2i| = 4\sqrt{2}$. Suy ra $H \leq 10\sqrt{2}$ (2).

Đẳng thức ở (2) xảy ra khi $\begin{cases} |z + 3 - 2i| = |z - 3 + 4i| \\ \exists l \in \mathbb{R}, l \geq 0 \\ z - 2 - i = l(2 + 2i) \\ |z - 2 - i| = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow z = 4 + 3i$.

+ Vậy $m = 6\sqrt{2}; M = 10\sqrt{2} \Rightarrow$ **Chọn A**

Câu 7:

Đề tham khảo-2018

Xét các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Khi biểu thức $P = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của $x + y$ bằng

- Ⓐ. 4. Ⓑ. 6. Ⓒ. 8. Ⓓ. 10.

a Định hướng

+ Nhận thấy $|z+1-3i| = |(z-4-3i)+5|$, $|z-1+i| = |(z-4-3i)+(3+2i)|$ do đó không tính được $\alpha|z+1-3i|^2 + \beta|z-1+i|^2$ theo $|z-4-3i|$ (α, β là các số thực).

+ Tuy nhiên ta lại có $|z+1-3i|^2 + |z-1+i|^2 = 2[|z-i|^2 + |1-2i|^2]$.

b Lời giải tham khảo

Lời giải

$$+ P \leq \sqrt{2[|z+1-3i|^2 + |z-1+i|^2]} = \sqrt{4[|z-i|^2 + |1-2i|^2]} = 2\sqrt{5+|z-i|^2} \quad (1).$$

+ $|z-i| = |(z-4-3i)+(4+2i)| \leq |z-4-3i| + |4+2i| = 3\sqrt{5} \quad (2)$. Đẳng thức ở (2) xảy ra

$$\text{khi } \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 \\ z-4-3i = k(4+2i) \Rightarrow z = 6+4i. \\ |z-4-3i| = \sqrt{5} \end{cases}$$

+ Từ (1) và (2) suy ra $P \leq 10\sqrt{2} \quad (3)$. Đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi đẳng thức ở

$$(1) \text{ và } (2) \text{ đồng thời xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6+4i \\ |z+1-3i| = |z-1+i| \end{cases} \Leftrightarrow z = 6+4i \Rightarrow \text{Chọn D}$$

Câu 8:

Sở GD&ĐT Quảng Nam-2018

Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2|z+1| + 2|z-1| + |z-\bar{z}-4i|$ bằng

Ⓐ. $4+2\sqrt{3}$. Ⓑ. $2+\sqrt{3}$. Ⓒ. $4+\frac{14}{\sqrt{15}}$. Ⓓ. $2+\frac{7}{\sqrt{15}}$.

a Định hướng

+ Nhận thấy $z-\bar{z}$ là số thuần ảo. Coi $z-\bar{z}$ là một biến số và tìm cách giảm biến số trong biểu thức P bằng BĐT $|z+1| + |z-1| = |z+1| + |-z+1| = |z+1| + |-\bar{z}+1| \geq |z-\bar{z}+2|$. Suy ra

$$P \geq 2|z-\bar{z}+2| + |z-\bar{z}-4i| = Q.$$

+ Nếu đặt $z = x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì Q là biểu thức chứa một biến y và ta có bài toán quen thuộc.

b Lời giải tham khảo

Lời giải

+ Đặt $z = x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có:

$$P = 2(|z+1| + |-\bar{z}+1|) + |z-\bar{z}-4i| \geq 2|z-\bar{z}+2| + |z-\bar{z}-4i|$$

$$= 2(2\sqrt{y^2 + 1} + |y - 2|).$$

$$+ 2\sqrt{y^2 + 1} + |y - 2| = \sqrt{[1^2 + (\sqrt{3})^2][y^2 + 1]} + |y - 2| \geq |y + \sqrt{3}| + |y - 2| \\ \geq y + \sqrt{3} + 2 - y = 2 + \sqrt{3}.$$

+ Từ đó suy ra $P \geq 2(2 + \sqrt{3})(1)$. Khi $z = \frac{\sqrt{3}}{3}i$ thỏa mãn $|z| \leq 2$ thì $P = 2(2 + \sqrt{3})$. Vậy $\min P = 2(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow$ **Chọn A**

Câu 9:

Face book - 2021

Cho số phức z thỏa mãn $|z - i| = 2$. Biết biểu thức $T = |z + 3i| + 2|z - 4 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Hiệu $x - y$ bằng

A. $\frac{3 - 6\sqrt{13}}{17}$. **B.** $\frac{6\sqrt{13} - 3}{17}$. **C.** $\frac{3 + 6\sqrt{13}}{17}$. **D.** $-\frac{3 + 6\sqrt{13}}{17}$.

a Định hướng

+ Khai thác kết luận: Biểu thức $T = |z + 3i| + 2|z - 4 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Ta phải “cân bằng hệ số” (làm xuất hiện thừa số 2 ở biểu thức $|z + 3i|$) trước khi áp dụng bất đẳng thức mô đun bằng đẳng thức sau: $|z_1 + z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \right|$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}; z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$).

+ Tổng quát bài toán: Cho trước hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\begin{cases} |z_1| > 0 \\ z_1 \neq z_2 \end{cases}$ và số thực dương c . Biết số phức z thỏa mãn $|z| = c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - z_1| + \frac{|z_1|}{c}|z - z_2|$.

b Lời giải tham khảo

Lời giải

+ Ta có $|z + 3i| = |(z - i) + 4i| = \left| \frac{|4i|}{|z - i|} (z - i) + \frac{|z - i|}{|4i|} (4i) \right| = 2|z|$; $T = 2(|z| + |4 + i - z|)$

$$\geq 2|z + 4 + i - z| = 2\sqrt{17} \quad (1).$$

+ Đẳng thức ở (1) xảy ra khi $\begin{cases} z = k(4 + i), (k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 1) \\ |z - i| = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow z = \frac{4 + 8\sqrt{13}}{17} + \frac{1 + 2\sqrt{13}}{17}i.$$

+ Vậy $x - y = \frac{3 + 6\sqrt{13}}{17} \Rightarrow$ **Chọn C**

c Bài tập tương tự

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và các điểm $A(3;0;0), B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) . Giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MB$ bằng

- Ⓐ. $2\sqrt{2}$. Ⓑ. $6\sqrt{2}$. Ⓒ. $2\sqrt{3}$. Ⓓ. $6\sqrt{3}$.

Câu 2: Trong không gian cho tam giác ABC có $AB = 2R, AC = R, CAB = 120^\circ$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt cầu tâm B bán kính R . Giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MC$ là

- Ⓐ. $4R$. Ⓑ. $6R$. Ⓒ. $R\sqrt{19}$. Ⓓ. $2R\sqrt{7}$.

Câu 10:

Face book - 2021

Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ và $P = \left| z^{2021} + (\bar{z})^{2019} + 6z \right| - 2 \left| z^{2020} + 1 \right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất của biểu thức P . Giá trị của biểu thức $T = M - m$ bằng

- Ⓐ. $\frac{1}{2}$. Ⓑ. 1 . Ⓒ. 2 . Ⓓ. 4 .

a Định hướng

+ $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$. Từ đó ta có: $P = \left| z^{2021} + \frac{1}{z^{2019}} + 6z \right| - 2 \left| z^{2020} + 1 \right|$
 $= \left| z \left(z^{2020} + \frac{1}{z^{2020}} + 6 \right) \right| - 2 \left| z^{2020} + 1 \right| = \left| z^{2020} + \overline{z^{2020}} + 6 \right| - 2 \left| z^{2020} + 1 \right|$.
 + Đặt $z^{2020} = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$. Ta đưa về bài toán quen thuộc.

b Lời giải tham khảo

Lời giải

+ $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$. Từ đó ta có: $P = \left| z^{2021} + \frac{1}{z^{2019}} + 6z \right| - 2 \left| z^{2020} + 1 \right|$
 $= \left| z \left(z^{2020} + \frac{1}{z^{2020}} + 6 \right) \right| - 2 \left| z^{2020} + 1 \right| = \left| z^{2020} + \overline{z^{2020}} + 6 \right| - 2 \left| z^{2020} + 1 \right|$ (Chú ý
 $\frac{1}{z^{2020}} = (\bar{z})^{2020} = \overline{z^{2020}})$.

+ Đặt $z^{2020} = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$, khi đó:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |z^{2020}| = |z|^{2020} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

+ Ta có $P = |2x + 6| - 2|(x+1) + yi| = 2x + 6 - 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2(x - \sqrt{2(x+1)}) + 6$

+ Xét hàm số $f(x) = 2\left(x - \sqrt{2(x+1)}\right) + 6, x \in [-1; 1]$. Dễ thấy $\min_{[-1; 1]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$;
 $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(1) = 4 \Rightarrow$ **Chọn B**

Câu 11:

Lê Quý Đôn Lai Châu-L1/N2018

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ và $|z_2 - i - 10| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$ bằng

- A.** $\sqrt{10} + 1$. **B.** $3\sqrt{5} - 1$. **C.** $\sqrt{101} - 1$. **D.** $\sqrt{101} + 1$.

a Định hướng

+ Đặt $z_1 = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$, khi đó từ $2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i|$ tính được $y = \frac{x^2}{4}$. (Nếu đặt $z_2 = a + bi$ thì tính a theo b sẽ rất phức tạp).

+ Tìm cách kết nối kết luận $|z_1 - z_2|$ với giả thiết $|z_2 - i - 10| = 1$ bằng:

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - i - 10| \geq |z_1 - z_2 + z_2 - i - 10| = \sqrt{(x-10)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2}.$$

b Lời giải tham khảo

Lời giải

+ Đặt $z_1 = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$, khi

$$\text{đó: } 2|\bar{z}_1 + i| = |\bar{z}_1 - z_1 - 2i| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(-2y-2)^2} \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow z_1 = x + \frac{x^2}{4}i.$$

$$+ |z_1 - z_2| + |z_2 - i - 10| \geq |z_1 - z_2 + z_2 - i - 10| = \sqrt{(x-10)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2}$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| \geq \sqrt{(x-10)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2} - 1.$$

+ Xét hàm số $f(x) = (x-10)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2, x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy $\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(4) = 45$.

+ Suy ra $|z_1 - z_2| \geq 3\sqrt{5} - 1$ (1). Đẳng thức ở (1) xảy ra khi $\begin{cases} z_1 = 4 + 4i \\ \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 \\ z_1 - z_2 = k(z_2 - i - 10) \\ |z_1 - z_2| = 3\sqrt{5} - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 4 + 4i \\ z_2 = \frac{50 - 2\sqrt{5}}{5} + \frac{5 + \sqrt{5}}{5}i \end{cases} \Rightarrow \text{Chọn B}$$

Câu 12:

Chuyên Đại Học Vinh-L2/N2021

Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 + 3i| = 1$ và $|z_2 - 8 - 6i| = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A). $5b + c = 4$. (B). $5b + c = -12$. (C). $5b + c = 12$. (D). $5b + c = -4$.

a Định hướng

+Nếu z_1 là số thực thì $1 = |z_1 - 4 + 3i| = \sqrt{(z_1 - 4)^2 + 9}$. Điều này vô lý.

+Vì $z_{1,2}$ là các nghiệm phức không thực của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nên

$$z_1 = \overline{z_2} \Rightarrow |z_1| = |\overline{z_2}| = |z_2|.$$

b Lời giải tham khảo

Lời giải

+Nếu z_1 là số thực thì $1 = |z_1 - 4 + 3i| = \sqrt{(z_1 - 4)^2 + 9} \geq 3$. Điều này vô lý.

+Vì $z_{1,2}$ là các nghiệm phức không thực của phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nên

$$z_1 = \overline{z_2} \Rightarrow |z_1| = |\overline{z_2}| = |z_2|.$$

+Mặt khác: $1 = |z_1 - 4 + 3i| \geq \|z_1| - |-4 + 3i|\| \Rightarrow 4 \leq |z_1| \leq 6$;

$4 = |z_2 - 8 - 6i| \geq \|z_2| - |-8 - 6i|\| = \|z_1| - 10\| \Rightarrow 6 \leq |z_1| \leq 14$. Suy ra $|z_1| = 6$.

+ $|z_1 - 4 + 3i| = \|z_1| - |-4 + 3i|\|$ khi và chỉ khi $z_1 = k(-4 + 3i)$ với $k \in \mathbb{R}$ và $k \leq 0$. Từ đây dễ dàng tính được $z_1 = \frac{24}{5} - \frac{18}{5}i$; $z_2 = \frac{24}{5} + \frac{18}{5}i$; $c = z_1 z_2 = |z_1|^2 = 36$ và $-b = z_1 + z_2 = \frac{48}{5}$

$\Rightarrow$ Chọn A.

Nhận xét

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức không thực z_1, z_2 trong mặt phẳng tọa độ Oxy thì A đối xứng với B qua trục thực Ox . Từ đây ta có các bài toán mới bằng cách thay điều kiện

$\begin{cases} |z_1 - 4 + 3i| = 1 \\ |z_2 - 8 - 6i| = 4 \end{cases}$ bởi điều kiện cho A thuộc đường tròn và B hoặc thuộc đường tròn; hoặc đoạn

thẳng; hoặc đường thẳng; hoặc parabol; hoặc hình thoi...Chú ý: $z_{1,2}$ là các nghiệm phức không thực của phương trình bậc hai hệ số thực.

Câu 13:

Chuyên Tuyên Quang-L3/N2021

Cho số phức z thỏa mãn $|z - \overline{z}| + |z + \overline{z}| \leq 6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z - 2 + 3i|^2 + |z + 4 - 13i|^2 \text{ bằng}$$

- (A). 156. (B). 155. (C). 146. (D). 147.

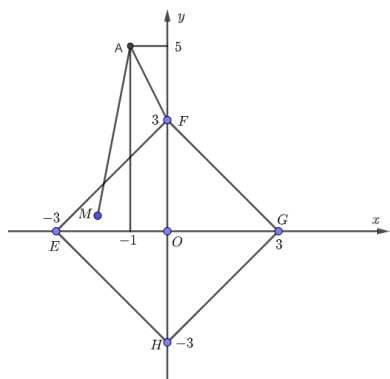
a Định hướng

+Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khi đó từ $|z - \bar{z}| + |z + \bar{z}| \leq 6 \Rightarrow M$ nằm trong hình vuông.
 + $P = 2 \left[|z + 1 - 5i|^2 + |-3 + 8i|^2 \right] = 2MA^2 + 146$ với $A(-1; 5)$. Như thế chỉ cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của MA sẽ tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P .

b Lời giải tham khảo

Lời giải

+Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó $|z - \bar{z}| + |z + \bar{z}| \leq 6 \Rightarrow |x| + |y| \leq 3 \Rightarrow M$ không nằm ngoài hình vuông $EFGH$ (hình vẽ).



+ $P = 2 \left[|z + 1 - 5i|^2 + |-3 + 8i|^2 \right] = 2MA^2 + 146$ với $A(-1; 5)$. Vì $\angle AFE > 90^\circ$ nên $MA^2 \geq MF^2 = 5 \Rightarrow P \geq 156$. Khi $z = 3i$ thỏa mãn điều kiện bài toán thì $P = 156$. Vậy $\min P = 156 \Rightarrow$ **Chọn A**

c Bài tập tương tự

- Câu 1:** Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 5 - 2i|$ bằng
 (A). $\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$. (B). $\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$. (C). $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$. (D). $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.
- Câu 2:** Cho số phức z thỏa mãn $|z|^2 = 2|z + \bar{z}| + 5$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 2 + 4i|$. Giá trị của $M + m$ bằng
 (A). $4 + 4\sqrt{2}$. (B). $8\sqrt{2}$. (C). 8 . (D). $3 + 4\sqrt{2}$.
- Câu 3:** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 3| = 2|z + \bar{z}|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z + 1 + 3i|$. Giá trị của $M + m$ bằng
 (A). $3 + \sqrt{13}$. (B). $4 + \sqrt{13}$. (C). $2 + \sqrt{13}$. (D). $5 + \sqrt{13}$.
- Câu 4:** Gọi S là tập tất cả các số thực dương m để có bốn số phức z thỏa mãn hệ $\begin{cases} |z| = m \\ |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z|^2 \end{cases}$. Tổng bình phương các phần tử của S bằng
 (A). 12 . (B). 17 . (C). 19 . (D). 22 .

Câu 14:

Sở GD Hòa Bình-T5/N2021

Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$, $|w-3+2i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $H = |z^2 - 2zw - 4|$ bằng

A. $16\sqrt{2}$.

B. $18\sqrt{2}$.

C. 18.

D. 24.

a Định hướng

+Không thể biến đổi giả thiết, do đó biến đổi kết

l luận : $H = |z^2 - 2zw - z\bar{z}| = |2z| \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| = 4 \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right|$.

+Đến đây chúng ta tìm cách giảm biến bằng cách xét $\frac{H}{4} - 1 = \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| - |w-3+2i|$.

b Lời giải tham khảo

Lời giải

+Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thì $\frac{z-\bar{z}}{2} = yi$; Vì $|z|=2$ nên

$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2 \Rightarrow 0 \leq y+2 \leq 4 \Rightarrow (y+2)^2 \leq 16$.

+Ta

có

$$H = |z^2 - 2zw - z\bar{z}| = |2z| \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| = 4 \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| \Rightarrow \frac{H}{4} - 1 = \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| - |w-3+2i|$$

$$\leq \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w + w - 3 + 2i \right| = \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - 3 + 2i \right| = |-3 + (y+2)i| = \sqrt{9 + (y+2)^2} \leq 5 \Rightarrow H \leq 24.$$

+Khi $\begin{cases} z = 2i \\ w = \frac{18}{5} - \frac{14}{5}i \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì $H = 24$. Vậy $\max H = 24 \Rightarrow$ **Chọn D.**

Nhận xét

Ta có thể tìm min H như sau

$$+ \frac{H}{4} + 1 = \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right| + |w-3+2i| \geq \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w + w - 3 + 2i \right| = \sqrt{9 + (y+2)^2} \geq 3 \Rightarrow H \geq 8.$$

+Khi $\begin{cases} z = -2i \\ w = 2 - 2i \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đề bài) thì $H = 8$. Vậy $\min H = 8$.

Biểu diễn hình học số phức : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M, N lần lượt biểu diễn số phức $\frac{z-\bar{z}}{2}$, w thì $NM = \left| \frac{z-\bar{z}}{2} - w \right|$. Rõ ràng điểm M thuộc đoạn thẳng AB với $A(0; -2), B(0; 2)$ và N là điểm thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3; -2)$, bán kính $r=1$.

+Ta có $NM + IN \geq MI \Rightarrow NM \geq MI - 1 \geq IA - 1$ (Chú ý $IA \perp AB$).

+ $NM \leq NI + IM = 1 + MI \leq 1 + \max\{IA; IB\}$.